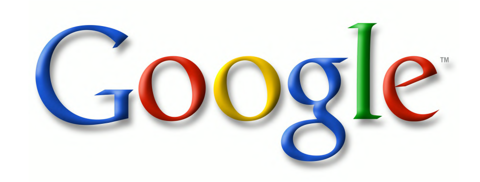
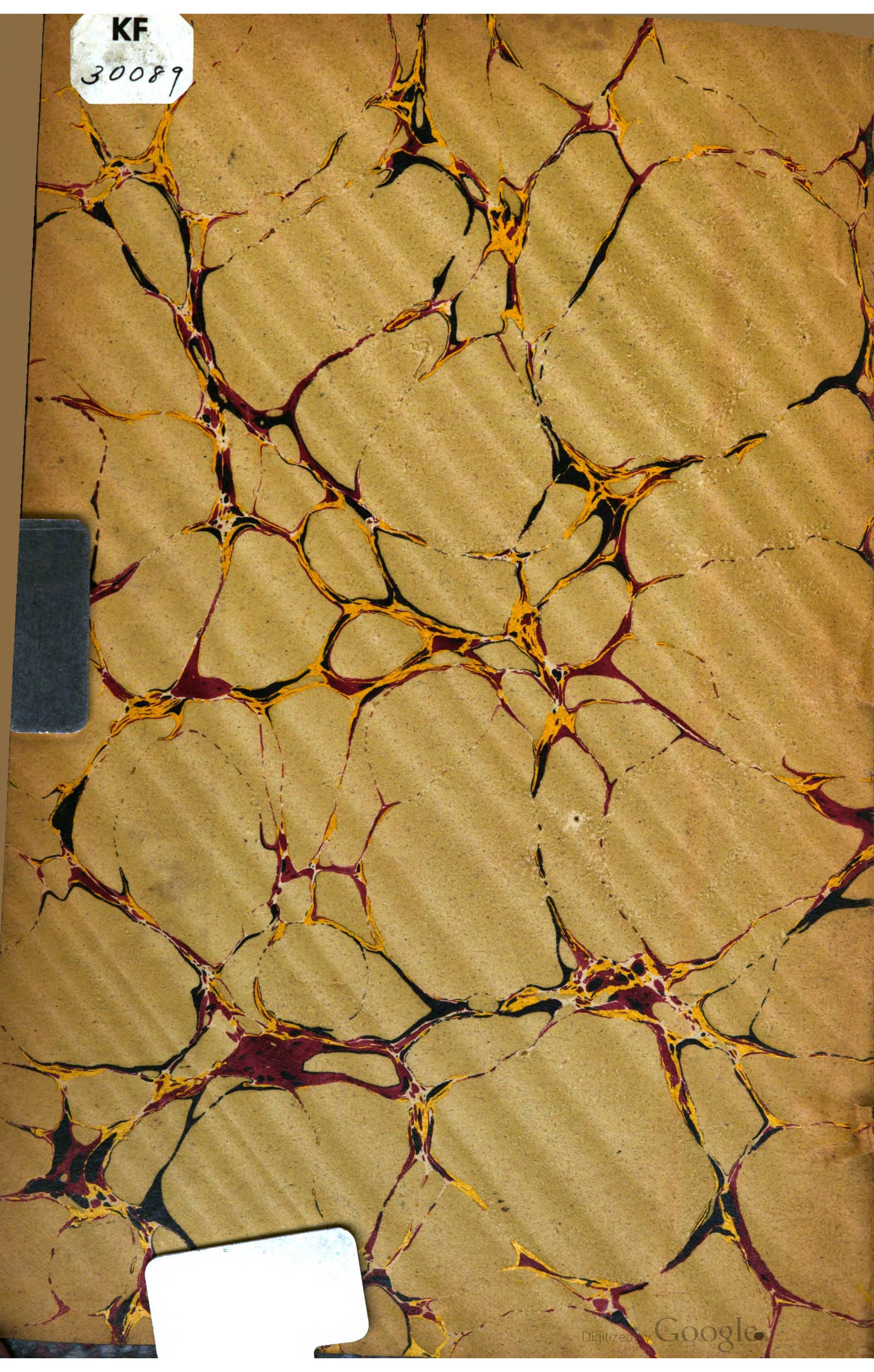
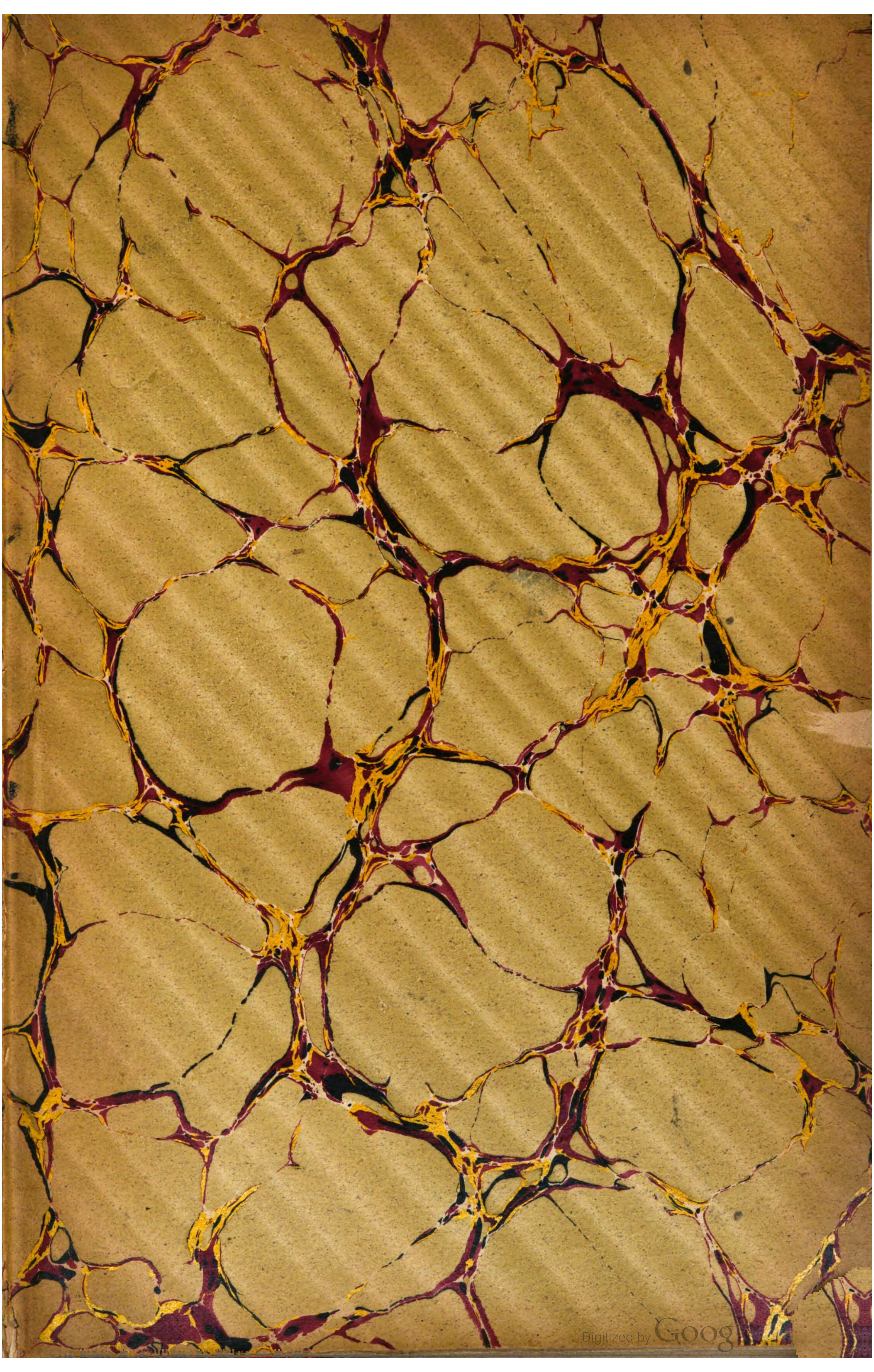


Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis

Georg Cantor





E. V. Huntington

SUR LES FONDEMENTS

DE LA

THÉORIE DES ENSEMBLES TRANSFINIS

PAR

G. CANTOR, à Halle-a-S.

(Traduction de F. MAROTTE)

Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. III (5e Série).

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN,

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE.

8 — rue de la Sorbonne — 8

1899

SUR LES FONDEMENTS

DE LA

THÉORIE DES ENSEMBLES TRANSFINIS

Par G. CANTOR, à Halle-a-S.

(Traduction de F. MAROTTE.)

1er ARTICLE (1)

Hypotheses non fingo.

Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus.

Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia.

---

§ 1. — *La notion de puissance ou le nombre cardinal.*

Nous appelons « ensemble » toute réunion M d'objets de notre conception m, déterminés et bien distincts, et que nous nommerons « éléments » de M. Nous écrirons ainsi

(1) $$M = \{m\}.$$

La réunion de plusieurs ensembles M, N, P, ..., qui n'ont aucun élément commun, donne un ensemble qui sera représenté par

(2) $$(M, N, P, \ldots).$$

Les éléments du nouvel ensemble sont ainsi les éléments de M, de N, de P, etc., considérés comme formant un seul tout.

---

(1) Publié dans les *Mathematische Annalen,* Bd XLVI, p. 481-512. 1895.

Nous dirons qu'un ensemble M_1 est une « partie » de l'ensemble M, si les éléments de M_1 sont aussi des éléments de M.

Si M_2 est une partie de M_1, M_1 une partie de M, M_2 est aussi une partie de M.

A tout ensemble M correspond une « puissance » bien déterminée que nous appelons aussi son « nombre cardinal ».

Nous appelons « puissance » ou « nombre cardinal » de M, *la notion générale que nous déduisons de* M *à l'aide de notre faculté de penser, en faisant abstraction de la nature des différents éléments m et de leur ordre.*

Nous représentons par

$$\overline{\overline{M}} \tag{3}$$

le nombre cardinal ou puissance de M, résultat de ces deux abstractions.

Chaque élément isolé m, abstraction faite de sa nature, est une « unité »; le nombre cardinal $\overline{\overline{M}}$ est donc lui-même un ensemble déterminé d'unités qui se présente comme l'image ou la projection de l'ensemble M dans notre esprit.

Nous disons que deux ensembles M *et* N *sont « équivalents » et nous écrivons*

$$M \sim N \quad \text{ou} \quad N \sim M \tag{4}$$

lorsqu'il est possible de les associer, de telle sorte qu'à chaque élément de l'un d'eux corresponde un et un seul élément de l'autre.

A chaque partie M_1 de M correspond alors une partie déterminée équivalente N_1 de N, et réciproquement.

Si l'on a trouvé une telle loi d'association pour deux ensembles équivalents, on peut (sauf le cas où ceux-ci ne comprendraient qu'un seul élément) en trouver plusieurs autres. Notamment, on peut toujours faire en sorte qu'à un élément déterminé m_0 de M, corresponde un élément déterminé n_0 de N. Car, si la loi d'association primitive ne faisait pas correspondre m_0 et n_0, c'est qu'à l'élément m_0 de M correspondrait

l'élément n_1 de N, tandis qu'à l'élément n_0 de N correspondrait l'élément m_1 de M; il suffit donc de modifier la loi d'association de façon que m_0 et n_0 et de même m_1 et n_1 deviennent des éléments correspondants des deux ensembles, et cela sans modifier la correspondance des autres éléments. Nous avons alors atteint notre but.

Un ensemble est équivalent à lui-même

(5) $$M \sim M.$$

Si deux ensembles sont équivalents à un troisième, ils sont équivalents entre eux.

(6) De $M \sim P$ et $N \sim P$ il résulte $M \sim N$.

Il est d'importance capitale que *deux ensembles* M *et* N *ont alors et seulement alors le même nambre cardinal lorsqu'ils sont équivalents.*

(7) De $M \sim N$ résulte $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$

et

(8) De $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ résulte $M \sim N$.

L'équivalence de deux ensembles est aussi la condition nécessaire et suffisante de l'égalité de leurs nombres cardinaux.

En effet, d'après la définition de la puissance donnée plus haut, le nombre cardinal $\overline{\overline{M}}$ reste inaltéré lorsqu'on substitue d'autres objets à un, à plusieurs ou à tous les éléments de M.

Or, si l'on a $M \sim N$, il y a une loi d'association qui réalise une correspondance biuniforme de M et N et fait correspondre à l'élément m de M l'élément n de N. Nous pouvons donc substituer à chaque élément m de M l'élément correspondant n de N et par cette opération transformer M en N sans changer le nombre cardinal. Donc

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

La réciproque de ce théorème résulte de la remarque

qu'entre les éléments de M et les diverses unités de son nombre cardinal $\overline{\overline{M}}$ existe une correspondance biuniforme. Car, comme nous l'avons vu, $\overline{\overline{M}}$ résulte de M en ce sens que chaque élément de M devient une unité de $\overline{\overline{M}}$. Nous pouvons donc dire que

$$M \sim \overline{\overline{M}}.$$

De même $N \sim \overline{\overline{N}}$, et comme l'on a $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, il en résulte, d'après (6), $M \sim N$.

De la notion de l'équivalence résulte encore immédiatement le théorème suivant :

Si M, N, P, ... *sont des ensembles formés d'éléments tous distincts et si* M′, N′, P′ *sont des ensembles correspondants analogues, les relations*

$$M \sim M' \qquad N \sim N' \qquad P \sim P' \ldots$$

ont pour conséquence

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M' N' P' \ldots)$$

§ 2. — *Comparaison des puissances.*

Si les deux ensembles M et N, dont les nombres cardinaux sont $a = \overline{\overline{M}}$ et $b = \overline{\overline{N}}$, remplissent les deux conditions :

1° *Il n'y a aucune partie de* M *qui soit équivalente à* N,

2° *Il y a une partie* N_1 *de* N, *telle que* $N_1 \sim M$,

il est tout d'abord évident que celles-ci sont aussi remplies lorsqu'on remplace les ensembles M et N par deux ensembles respectivement équivalents M′ et N′ ; *elles expriment donc une relation déterminée entre les nombres cardinaux a et b*.

De plus, l'équivalence de M et N, et par suite l'égalité de a et b sont exclues ; car si l'on avait $M \sim N$ et $N_1 \sim M$, on aurait aussi $N_1 \sim N$, et en vertu de l'équivalence des ensembles M et N, il existerait une partie de M_1 de M telle que $M_1 \sim M$, et par suite $M_1 \sim N$, ce qui est contraire à la première condition.

En troisième lieu, *la relation de a à b est telle qu'elle exclut la même relation de b à a ;* car si l'on permute dans

1° et 2° les lettres M et N, on obtient deux conditions qui sont contradictoires aux premières.

Nous exprimons la relation de a à b caractérisée par les conditions 1° *et* 2° *en disant : a est plus petit que b ou encore b est plus grand que a*, ce que nous écrivons

(1) $$a < b \quad \text{ou} \quad b > a$$

On démontre facilement que

(2) Si $a < b$, $b < c$, on a toujours $a < c$.

De même, il résulte immédiatement de la définition que *si* P_1 *est une partie d'un ensemble* P, *la relation* $a < \overline{\overline{P}}_1$ *entraîne toujours* $a < \overline{\overline{P}}$ *et* $\overline{\overline{P}} < b$ *entraîne aussi* $\overline{\overline{P}}_1 < b$.

Nous avons vu que chacune des trois relations

$$a = b, \qquad a < b, \qquad b < a$$

exclut les deux autres.

Au contraire, il n'est nullement évident, et nous ne pourrions que difficilement démontrer actuellement que pour deux nombres cardinaux quelconques a et b, l'une de ces trois relations est nécessairement vérifiée.

Bientôt, lorsque nous aurons jeté un coup d'œil sur la suite ascendante des nombres cardinaux infinis et que nous aurons pénétré leur enchaînement, nous reconnaîtrons l'exactitude du théorème suivant :

A. — *Si a et b sont deux nombres cardinaux arbitraires, l'on a :*

$$\text{ou } a = b, \quad \text{ou } a < b, \quad \text{ou } a > b.$$

On déduit très simplement de ce théorème les propositions suivantes dont nous ne ferons provisoirement aucun usage.

B. — *Si deux ensembles* M *et* N *sont tels que* M *est équivalent à une partie* N_1 *de* N *et* N *équivalent à une partie* M_1 *de* M, M *et* N *sont aussi équivalents.*

C. — *Si* M_1 *est une partie d'un ensemble* M, M_2 *une partie de l'ensemble* M_1 *et si les ensembles* M *et* M_2 *sont équivalents, ils sont aussi équivalents à l'ensemble* M_1.

D. — *Si deux ensembles* M *et* N *sont tels que* N *n'est équivalent ni avec*

M lui-même, ni avec une partie de M, il y a une partie N_1 de N qui est équivalente à M.

E. — *Si deux ensembles M et N ne sont pas équivalents et s'il y a une partie N_1 de N équivalente à M, il n'y a aucune partie de M équivalente à N.*

§ 3. — *L'addition et la multiplication des puissances.*

La réunion de deux ensembles M et N qui n'ont aucun élément commun a été représentée par (M, N) [§ 1. (2)]. Nous nommons ce nouvel ensemble l'*ensemble-somme (Vereinigungsmenge) de* M *et de* N.

Si M′, N′ sont deux autres ensembles sans éléments communs et si $M \sim M'$, $N \sim N'$, nous avons vu que

$$(M, N) \sim (M', N').$$

Il en résulte que le nombre cardinal de (M, N) ne dépend que des nombres cardinaux $\overline{\overline{M}} = a$ et $\overline{\overline{N}} = b$.

Ceci nous conduit à la définition de la somme de a et b lorsque nous posons

$$(1) \qquad a + b = \overline{\overline{(M, N)}}.$$

Puisque dans la notion de puissance, il est fait abstraction de l'ordre des éléments, nous avons

$$(2) \qquad a + b = b + a$$

et pour 3 nombres cardinaux a, b et c

$$(3) \qquad a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Arrivons à la multiplication.

La réunion d'un élément m d'un ensemble M et d'un élément n d'un autre ensemble N forme un nouvel élément (m, n). Nous désignerons par la notation $(M \times N)$ l'ensemble formé de tous les éléments (m, n) et nous l'appellerons

ensemble-produit (Verbindungsmenge) de M *et de* N. On a ainsi

(4) $$(M \times N) = \{(m, n)\}.$$

On voit facilement que la puissance de $(M \times N)$ ne dépend que des puissances de $\overline{\overline{M}} = a$ et $\overline{\overline{N}} = b$; car si l'on remplace les ensembles M et N par les ensembles respectivement équivalents

$$M' = \{m'\} \quad \text{et} \quad N' = \{n'\}$$

et si l'on considère m, m' ainsi que n, n' comme des éléments associés, on voit que l'ensemble

$$(M' \times N') = \{(m', n')\}$$

est lié à l'ensemble $(M \times N)$ par une correspondance biuniforme si l'on fait correspondre les éléments (m, n) et $(m'\ n')$. Ainsi

(5) $$(M' \times N') \sim (M \times N).$$

Nous pouvons maintenant définir le produit $a \times b$ par l'équation

(6) $$a \times b = \overline{\overline{(M \times N)}}.$$

On peut aussi déduire des deux ensembles M et N, dont les nombres sont a et b, un ensemble de nombre cardinal $a \times b$ par la règle suivante : on remplace chaque élément n de l'ensemble N par un ensemble $M_n \sim M$; si l'on considère les éléments de tous ces ensembles M_n réunis en un seul tout S, on voit facilement que

(7) $$S \sim (M \times N)$$

et par suite

$$\overline{\overline{S}} = a \times b.$$

Car si nous désignons par m_n l'élément de M_n correspondant à l'élément m de M, on a :

(8) $$S = \{m_n\}$$

et, par suite, les ensembles S et $(M \times N)$ se correspondent d'une manière biuniforme lorsque l'on associe m_n et (m, n).

De nos définitions résultent immédiatement les théorèmes

(9) $$a \times b = b \times a$$

10) $$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

(11) $$a \times (b + c) = ab + ac$$

parce que

$$(M \times N) \sim (N \times M)$$

$$[M \times (N \times P)] \sim [(M \times N) \times P]$$

$$[M \times (N, P)] \sim [(M \times N), (M \times P)].$$

L'addition et la multiplication des puissances sont ainsi soumises aux lois commutative, associative et distributive.

§ 4. — *L'exponentiation des puissances.*

Nous disons d'une loi qui, à chaque élément n de N fait correspondre un élément déterminé de M, le même élément pouvant être employé plusieurs fois, qu'elle réalise une *représentation (Belegung) de l'ensemble* N *sur les éléments de l'ensemble* M, ou, plus simplement, une *représentation de* N *sur* M. L'élément de M associé ainsi à n est, d'une certaine façon, une fonction uniforme de n et peut, par exemple, être désigné par $f(n)$; $f(n)$ est la *fonction de représentation* de n; la représentation correspondante de N sera désignée par $f(N)$.

Deux représentations $f_1(N)$ et $f_2(N)$ sont alors, et seulement alors, dites identiques lorsque *pour tous les éléments* n *de* N on a l'équation

(1) $$f_1(n) = f_2(n)$$

de sorte que si pour un seul élément particulier $n = n_0$ cette équation n'est pas vérifiée, les représentations $f_1(N)$ et $f_2(N)$ sont considérées comme distinctes.

Par exemple, si m_0 est un élément particulier de M et si l'on suppose que pour tous les éléments n on a

$$f(n) = m_0$$

on a une représentation particulière de N sur M.

On obtiendra une autre représentation lorsque, m_0 et m_1 étant deux éléments différents de M, n_0 un élément particulier de N, on pose

$$f(n_0) = m_0$$
$$f(n) = m_1$$

pour tous les n différents de n_0.

La réunion de toutes les représentations distinctes de N sur M forme un ensemble déterminé dont les éléments sont $f(N)$; nous le nommons *l'ensemble exponentiel* (*Belegungsmenge*) de N avec M et nous le représentons par la notation $(N|M)$. Ainsi

$$(2) \qquad (N|M) = \{f(N)\}.$$

Si $M \sim M'$, $N \sim N'$, on voit facilement que

$$(3) \qquad (N|M) \sim (N'|M').$$

Le nombre cardinal de $(N|M)$ ne dépend donc que des nombres cardinaux $\overline{\overline{M}} = a$ et $\overline{\overline{N}} = b$; cela nous conduit à la définition de a^b

$$(4) \qquad a^b = \overline{\overline{(N|M)}}.$$

Pour trois ensembles quelconques, M, N et P, on démontre facilement les théorèmes suivants :

$$(5) \qquad [(N|M) \times (P|M)] \sim [(N, P)|M]$$
$$(6) \qquad [(P|M) \times (P|N)] \sim [P|(M \times N)]$$
$$(7) \qquad [P|(N|M)] \sim [(P \times N)|M]$$

Il en résulte, si l'on pose $\overline{\overline{P}} = c$, que, pour trois nombres cardinaux a, b, c quelconques, on a :

$$(8) \qquad a^b . a^c = a^{b+c}$$

$$(9) \qquad a^c . b^c = (ab)^c$$

$$(10) \qquad (a^b)^c = a^{b.c}.$$

On reconnaîtra par l'exemple suivant combien ces formules simples, étendues aux puissances, sont instructives et d'une grande portée.

Désignons par $\mathfrak{o}$ la puissance du continu linéaire X (c'est-à-dire de l'ensemble X de tous les membres réels x qui sont ≥ 0 et ≤ 1. On s'assure facilement que $\mathfrak{o}$ peut être représenté par la formule

$$(11) \qquad \mathfrak{o} = 2^{\aleph_0}.$$

$\aleph_0$ étant le nombre défini au § 6.

En effet, d'après (4), $2^{\aleph_0}$ n'est pas autre chose que la puissance de l'ensemble de toutes les représentations

$$(12) \quad x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \ldots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \ldots \text{ (où } f(\nu) = 0 \text{ ou } 1).$$

des nombres x dans le système de numération dont la base est 2. Si nous remarquons, de plus, qu'il n'y a pour chaque nombre x qu'une seule manière de les représenter ainsi, sauf pour les nombres

$$x = \frac{2\nu + 1}{2^\mu} < 1,$$

pour lesquels il y a deux manières, nous voyons qu'en représentant par $\{s_\nu\}$ l'ensemble « dénombrable » de ces derniers on a :

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_\nu\}, X)}}.$$

Supposons que l'on retranche de X un ensemble dénombrable quelconque $\{t_\nu\}$ et désignons le reste par X_1, on a :

$$X = (\{t_\nu\}, X_1) = (\{t_{2\nu-1}\}, \{t_{2\nu}\}, X_1)$$

$$(\{s_\nu\}, X) = (\{s_\nu\}, \{t_\nu\}, X_1)$$

$$\{t_{2\nu-1}\} \sim \{s_\nu\} \qquad \{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\} \qquad X_1 \sim X_1$$

et il en résulte

$$X \sim (\{s_\nu\}, X)$$

et par suite (§ 1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}.$$

En élevant au carré les deux membres de la formule et se reportant au § 6, (6)

$$\mathfrak{o}\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

et par des multiplications successives :

(13) $$\mathfrak{o}^{\nu} = \mathfrak{o}$$

ν étant un nombre cardinal fini quelconque.

Élevons les deux membres de (11) à la puissance $\aleph_0$. On obtient :

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0}.$$

Mais comme d'après § 6, (8) $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$

(14) $$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = \mathfrak{o}.$$

La signification des formules (13) et (14) est celle-ci : *Les continus à ν dimensions ainsi que les continus à $\aleph_0$ dimensions ont même puissance que le continu linéaire*. Ainsi, tout le contenu du mémoire du *Journal de Crelle*, tome LXXXIV, page 242, est obtenu d'une façon purement algébrique à l'aide des formules fondamentales du calcul des puissances.

§ 5. — *Les nombres cardinaux finis.*

Nous voulons montrer tout d'abord que les principes que nous venons d'exposer, et sur lesquels nous fonderons la théorie des nombres cardinaux actuellement infinis ou transfinis, fournissent aussi l'exposé le plus naturel, le plus court et le plus rigoureux de la théorie des nombres finis.

A un objet isolé e_0, considéré comme élément unique d'un ensemble $E_0 = (e_0)$, correspond comme nombre cardinal celui que nous nommons « un » et que nous écrivons 1 ; nous avons :

(1) $$1 = \overline{\overline{E_0}}.$$

Si l'on ajoute maintenant à E_0 un autre objet e_1, l'ensemble somme s'appelle E_1, de sorte que

(2) $$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1).$$

Le nombre cardinal de E_1 s'appelle « deux » et s'écrit 2.

(3) $$2 = \overline{\overline{E}}_1.$$

Par l'adjonction successive de nouveaux éléments, nous obtenons la série des ensembles

$$E_2 = (E_1, e_2), \qquad E_3 = (E_2, e_3), \ldots$$

qui nous fournissent la suite illimitée des autres *nombres cardinaux* appelés *finis* et que nous écrivons 3, 4, 5, ... L'emploi que nous faisons des mêmes nombres comme indices se justifie en ce sens qu'un nombre n'est ainsi employé qu'après avoir été défini comme nombre cardinal. Si $\nu - 1$ désigne le nombre précédant immédiatement le nombre ν dans cette série, nous avons

(4) $$\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}$$

(5) $$E_\nu = (E_{\nu-1}, e_\nu) = (e_0, e_1, \ldots, e_\nu).$$

De la définition de la somme donnée au § 3, il résulte

(6) $$\overline{\overline{E}}_\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} + 1$$

c'est-à-dire que tout nombre cardinal fini (sauf 1) est la somme de celui qui le précède immédiatement et de 1.

Dans le développement de nos idées, les trois théorèmes suivants viennent maintenant au premier plan.

A. *Les termes de la série illimitée des nombres cardinaux finis* 1, 2, 3, ..., ν, ... *sont tous différents entre eux* (c'est-à-dire que la condition d'équivalence des ensembles correspondants donnée au § 1 n'est pas remplie).

B. *Chacun de ces nombres* ν *est plus grand que tous ceux*

qui le précèdent et plus petit que tous ceux qui le suivent (§ 2).

C. *Il n'y a aucun nombre cardinal dont la valeur soit comprise entre deux nombres consécutifs* ν *et* $\nu+1$ (§ 2).

Nous basons la démonstration de ces théorèmes sur les deux suivants D et E que nous établirons d'abord.

D. *Si l'ensemble* M *est tel qu'il n'est équivalent à aucune de ses parties, l'ensemble* (M, *e*) *qui résulte de* M *par l'adjonction d'un nouvel élément e, a aussi la même propriété de n'être équivalent à aucune de ses parties.*

E. *Si* N *est un ensemble dont le nombre cardinal* ν *est fini et* N_1 *une partie de* N, *le nombre cardinal de* N_1 *est égal à l'un des nombres* 1, 2, 3, ..., $\nu - 1$.

Démonstration de D. — Supposons donc que l'ensemble (M, *e*) soit équivalent à une de ses parties que nous appellerons N, nous distinguerons deux cas qui conduisent tous deux à une contradiction.

1° L'ensemble N contient l'élément *e*; soit $N = (M_1, e)$; M_1 est alors une partie de M, car N est une partie de (M, *e*). Comme nous l'avons vu au § 1, on peut modifier la loi d'association des deux ensembles équivalents (M, *e*) et (M_1, e) de façon que l'élément *e* de l'un corresponde à l'élément *e* de l'autre, et alors les éléments des ensembles M et M_1 se correspondent un à un, ce qui est contraire à l'hypothèse que M n'est équivalent à aucune de ses parties.

2° La partie N de (M, *e*) ne contient pas l'élément *e* et, par suite, est ou M ou une partie de M. La loi d'association de (M, *e*) et de N fait correspondre à l'élément *e* de (M, *e*) l'élément *f* de N. Soit $N = (M_1, f)$; les éléments des ensembles M et M_1 se correspondent d'une manière uniforme; mais M_1 qui est une partie de N est aussi une partie de M. M serait donc aussi équivalent à l'une de ses parties, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Démonstration de E. — Supposons le théorème vrai pour

un certain nombre ν et démontrons-le pour le nombre suivant $\nu + 1$.

Comme ensemble définissant le nombre cardinal $\nu + 1$, nous avons pris $E_\nu = (e_0\, e_1 \ldots e_\nu)$; si le théorème est exact pour celui-ci, il résulte du § 1 qu'il est aussi vrai pour tout autre ensemble de même nombre cardinal. Soit E' une partie quelconque de E_ν; nous distinguerons les cas suivants :

1° E' ne contient pas l'élément e_ν et est alors ou $E_{\nu-1}$ ou une partie de $E_{\nu-1}$; il a donc pour nombre cardinal ou ν ou un des nombres $1, 2, 3, \ldots, \nu - 1$, puisque nous supposons notre théorème vrai pour l'ensemble $E_{\nu-1}$ de nombre cardinal ν.

2° E' se compose d'un seul élément e_ν, alors $\overline{\overline{E'}} = 1$.

3° E' se compose de e_ν et d'un ensemble E'', de sorte que $E' = (E'', e_\nu)$. E'' est une partie de $E_{\nu-1}$ et a, par suite, pour nombre cardinal un des nombres $1, 2, 3, \ldots, \nu - 1$.

Mais on a $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E''}} + 1$ et par suite E' a pour nombre cardinal un des nombres $2, 3, \ldots, \nu$.

Démonstration de A. — Chacun des ensembles que nous avons désignés par E_ν a la propriété de n'être équivalent à aucune de ses parties. Car s'il en est ainsi pour un certain nombre cardinal ν, il résulte du théorème D que c'est aussi vrai pour le suivant $\nu + 1$.

Mais pour $\nu = 1$, on reconnaît immédiatement que l'ensemble $E_1 = (e_0, e_1)$ n'est équivalent à aucune de ses parties, qui sont ici (e_0) et (e_1).

Considérons maintenant deux nombres quelconques μ et ν de la série $1, 2, 3, \ldots$, μ étant placé avant ν dans la série; $E_{\mu-1}$ est une partie de $E_{\nu-1}$, par suite $E_{\mu-1}$ et $E_{\nu-1}$ ne sont pas équivalents et les nombres cardinaux correspondants ne sont pas égaux.

Démonstration de B. — Considérons encore les nombres μ et ν; μ venant avant ν dans la série des nombres cardinaux finis, je dis que $\mu < \nu$. En effet, si nous considérons les

deux ensembles $M = E_{\mu-1}$ et $N = E_{\nu-1}$, ils remplissent les deux conditions données au § 2 pour $M < N$.

La première condition est remplie, car d'après le théorème E, une partie de $M = E_{\mu-1}$ a l'un des nombres cardinaux 1, 2, 3, ..., $\mu - 1$ et, par suite, d'après le théorème A, ne peut être équivalent à l'ensemble $N = E_{\nu-1}$. La deuxième condition est remplie, car M est lui-même une partie de N.

Démonstration de C. — Soit a un nombre cardinal plus petit que $\nu + 1$. D'après la deuxième condition du § 2, il y a une partie de E_ν qui a pour nombre cardinal a. D'après le théorème E, toute partie de E_ν a pour nombre cardinal 1, 2, 3, ..., ν.

Donc a est égal à l'un des membres 1, 2, 3, ..., ν.

D'après le théorème B, aucun de ces nombres n'est plus grand que ν.

Par suite, il n'y a aucun nombre cardinal qui soit plus petit que $\nu + 1$ et plus grand que ν.

Le théorème suivant sera très important pour la suite.

F. *Soit* K *un ensemble de nombres cardinaux finis et distincts, il y en a un parmi eux* x_1 *qui est plus petit que tous les autres et est ainsi le plus petit de tous.*

Démonstration. — Ou l'ensemble K contient le nombre 1 qui est alors le plus petit $x_1 = 1$; ou il ne le contient pas. Dans ce cas, soit J l'ensemble de *tous* les nombres cardinaux de notre série 1, 2, 3, ... qui sont plus petits que les nombres de K. Si un nombre ν appartient à J, il en est de même de tous les nombres plus petits que ν. Mais J doit contenir un élément ν_1 tel que $\nu_1 + 1$ et par suite tous les nombres plus grands n'appartiennent pas à J, car autrement J comprendrait l'ensemble de tous les nombres finis, ce qui est impossible car les nombres appartenant à K ne sont pas contenus dans J. Ainsi J n'est pas autre chose que la suite (1, 2, 3, ... ν_1). Le nombre $x_1 = \nu_1 + 1$ est nécessairement un élément de K et il est plus petit que tous les autres.

De F on déduit :

G. *Tout ensemble* $K = \{\varkappa\}$ *de nombres cardinaux finis et différents peut s'écrire :*

$$K = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots)$$

où

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 \ldots$$

§ 6. — *Le plus petit nombre cardinal transfini aleph-zéro.*

Les ensembles dont le nombre cardinal est fini s'appellent *ensembles finis;* nous appellerons tous les autres des *ensembles transfinis* et les nombres cardinaux correspondants seront des *nombres cardinaux transfinis.*

L'ensemble de *tous les nombres cardinaux finis* ν nous donne un exemple immédiat d'un ensemble transfini : nous nommons le nombre cardinal correspondant (§ 1) le nombre aleph-zéro et nous l'écrivons $\aleph_0$, de sorte que

$$(1) \qquad \aleph_0 = \{\nu\}.$$

Ce fait que $\aleph_0$ est un nombre *transfini,* c'est-à-dire n'est égal à aucun nombre fini μ, résulte de cette simple remarque que, si l'on ajoute à l'ensemble $\{\nu\}$ un nouvel élément e_0, l'ensemble somme $(\{\nu\}, e_0)$ est équivalent à l'ensemble primitif. Car on établit entre les éléments des deux ensembles une correspondance biuniforme en faisant correspondre à l'élément e_0 du premier l'élément 1 du second et à l'élément ν du premier l'élément $\nu + 1$ du second. D'après le § 3 nous avons donc :

$$(2) \qquad \aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

Mais nous avons montré au § 5 que $\mu + 1$ est toujours différent de μ; donc $\aleph_0$ n'est égal à aucun nombre fini.

Le nombre $\aleph_0$ *est plus grand que tout nombre fini* μ

$$(3) \qquad \aleph_0 > \mu.$$

Cela résulte (§ 3) de ce que $\mu = \overline{\overline{(1, 2, 3, \ldots, \mu)}}$ ajouté à ceci qu'aucune partie de l'ensemble $(1, 2, 3, \ldots, \mu)$ n'est équivalente à l'ensemble $\{\nu\}$, tandis que $(1, 2, 3, \ldots, \mu)$ est une partie de $\{\nu\}$.

D'ailleurs $\aleph_0$ est *le plus petit nombre cardinal transfini.* Si a est un nombre cardinal transfini quelconque différent de $\aleph_0$, on a toujours

$$(4) \qquad \aleph_0 < a.$$

Cela résulte des théorèmes suivants :

A. *Tout ensemble transfini* T *a des parties dont le nombre cardinal est* $\aleph_0$.

Démonstration. — Si l'on sépare de l'ensemble T par un procédé quelconque un nombre fini d'éléments $t_1, t_2, \ldots t_{\nu-1}$, on peut toujours en retirer un de plus t_ν. L'ensemble $\{t_\nu\}$ où ν désigne un nombre cardinal fini arbitraire, est une partie de T dont le nombre cardinal est $\aleph_0$, car $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$. (§ 1.)

B. *Si* S *est un ensemble transfini de nombre cardinal* $\aleph_0$, S_1 *une partie infinie de* S, *on a aussi* $\overline{\overline{S}}_1 = \aleph_0$.

Démonstration. — Nous supposerons que $S \sim \{\nu\}$; si nous désignons par s_ν l'élément de S qui correspond à l'élément ν de $\{\nu\}$ en vertu d'une loi d'association arbitraire, nous avons

$$S = \{s_\nu\}.$$

La partie S_1 de S se compose de certains éléments $s_\varkappa$ de S et la réunion de tous les nombres $\varkappa$ forme une partie infinie K de l'ensemble $\{\nu\}$. Or, d'après le théorème G, § 5, l'ensemble K peut s'écrire

$$K = \{\varkappa_\nu\}$$

où

$$\varkappa_\nu < \varkappa_{\ +1}$$

et par suite on a aussi

$$S_1 = \{s_{\varkappa_\nu}\}.$$

Il en résulte que $S_1 \sim S$ et que $\overline{\overline{S}}_1 = \aleph_0$.

En se reportant au § 1, on voit que les théorèmes A et B démontrent la formule (4).

En ajoutant 1 aux deux membres de l'égalité (2), nous avons :

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

et en répétant cette opération :

(5) $$\aleph_0 + \nu = \aleph_0.$$

Mais nous avons aussi :

(6) $$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Car d'après l'égalité (1), § 3, $\aleph_0 + \aleph_0$ est le nombre cardinal $\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}}$ parce que

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}}.$$

Mais on a évidemment :

$$\{\nu\} = (\{2\nu - 1\}, \{2\nu\})$$
$$(\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\})$$

et par suite

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0.$$

L'équation (6) peut aussi s'écrire :

$$\aleph_0 . 2 = \aleph_0,$$

et en ajoutant un certain nombre de fois $\aleph_0$ aux deux membres de cette équation :

(7) $$\aleph_0 . \nu = \nu . \aleph_0 = \aleph_0.$$

Nous avons aussi :

(8) $$\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0.$$

Démonstration. — D'après la formule (6) du § 3, $\aleph_0 . \aleph_0$ est le nombre cardinal de l'ensemble $\{(\mu, \nu)\}$, où μ et ν sont deux nombres cardinaux is quelconques, indépendants l'un de

l'autre. Si λ représente aussi un nombre cardinal fini arbitraire (de sorte que $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ et $\{\nu\}$ sont seulement des modes différents de représenter l'ensemble de tous les nombres cardinaux finis), nous avons à montrer que

$$\{(\mu, \nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Posons $\mu + \nu = \rho$; ρ prendra les valeurs 2, 3, 4, ... et il y a en tout $\rho - 1$ éléments $\{\mu, \nu\}$ pour lesquels $\mu + \nu = \rho$, savoir :

$$(1, \rho - 1), (2, \rho - 2), ..., (\rho - 1, 1).$$

Supposons que l'on écrive dans cet ordre d'abord l'élément (1, 1) pour lequel $\rho = 2$, puis les deux éléments pour lesquels $\rho = 3$, puis les trois éléments pour lesquels $\rho = 4$, et ainsi de suite; on obtiendra tous les éléments (μ, ν) écrits comme il suit :

$$(1,1); (1,2), (2,1); (1,3), (2,2), (3,1); (1,4), (2,3),...;$$

et comme on le voit facilement, l'élément (μ, ν) occupe le rang

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}. \tag{9}$$

λ prend successivement les valeurs 1, 2, 3, ...; il existe ainsi en vertu de (9) une correspondance biuniforme entre les deux ensembles $\{\lambda\}$ et $\{\mu, \nu\}$.

Si l'on multiplie par $\aleph_0$ les deux membres de l'équation (8), on obtient $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0$, et en répétant l'opération, on obtient l'équation

$$\aleph_0^\nu = \aleph_0, \tag{10}$$

valable pour un nombre cardinal fini quelconque ν.

Les théorèmes E et A du § 5 nous conduisent à cette proposition sur les ensembles *finis*.

C. *Tout ensemble fini* E *est tel qu'il n'est équivalent à aucune de ses parties.*

Nous mettrons en regard le théorème suivant relatif aux ensembles *transfinis*.

D. *Tout ensemble transfini* T *est tel qu'il a des parties* T_1 *qui lui sont équivalentes.*

Démonstration. — D'après le théorème A de ce paragraphe, il y a une partie $S = \{t_\nu\}$ de T dont le nombre cardinal est $\aleph_0$. Soit $T = (S, U)$, de sorte que U est formé des éléments de T qui sont différents des éléments t_ν. Si nous posons $S_1 = \{t_{\nu+1}\}$ et $T_1 = (S_1, U)$, T_1 est une partie de T que l'on obtient en séparant de T le seul élément t_1. Comme $S \sim S_1$ (théoréme B de ce paragraphe) et $U \sim U$, on a aussi (§ 1) $T \sim T_1$.

Les théorèmes C et D mettent en lumière la différence essentielle entre les ensembles finis et transfinis, indiquée déjà dès 1877 dans le *Journal de Crelle*, tome LXXXIV, page 242.

Maintenant que nous avons défini le plus petit nombre cardinal transfini $\aleph_0$ et obtenu ses propriétés les plus immédiates, la question se pose de rechercher les nombres cardinaux supérieurs et leur génération à partir de $\aleph_0$.

Nous montrerons que les nombres cardinaux transfinis se rangent par ordre de grandeur et forment ainsi rangés, comme les nombres cardinaux finis, quoique dans un sens plus étendu, un *ensemble bien ordonné*.

De $\aleph_0$ résulte, d'après une loi déterminée, le nombre cardinal *immédiatement supérieur* $\aleph_1$; de celui-ci et d'après la même loi résulte le nombre suivant $\aleph_2$, et ainsi de suite.

Mais la suite illimitée des nombres cardinaux

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

n'épuise pas la notion de nombre cardinal transfini. Nous démontrerons l'existence d'un nombre cardinal que nous désignerons par $\aleph_\omega$ et qui se présente comme *le nombre immédiatement supérieur à tous les nombres* $\aleph_\nu$; de ce nombre

résulte, de la même manière que $\aleph_1$ résulte de $\aleph_0$, un nombre immédiatement supérieur $\aleph_{\omega+1}$, et ainsi de suite indéfiniment.

Ainsi on déduit, par une loi simple, d'un *nombre cardinal infini quelconque a*, un autre nombre *immédiatement supérieur* et, de plus, de cet ensemble ascendant illimité et bien ordonné $\{a\}$ de nombres cardinaux a résulte simplement un nombre *immédiatement supérieur*.

Pour démontrer rigoureusement ces résultats trouvés en l'année 1882 et déjà publiés dans mon ouvrage : *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfältigkeitslehre* (Leipzig, 1883), ainsi qu'au tome XXI des *Mathematische Annalen*, nous emploierons la notion de *type*, dont nous allons d'abord développer la théorie dans les paragraphes suivants.

§ 7. — *Les types ordinaux (Ordnungstypen) des ensembles simplement ordonnés.*

Nous dirons qu'un ensemble M est *simplement ordonné* lorsqu'on a rangé ses éléments dans un ordre de succession jouissant des deux propriétés suivantes : 1° de deux éléments quelconques m_1 et m_2, l'un m_1 a le rang le plus bas, l'autre le rang le plus élevé ; 2° si de trois éléments m_1, m_2, m_3, m_1 a un rang plus bas que celui de m_2, et m_2 un rang plus bas que celui de m_3, le rang de m_1 est aussi plus bas que celui de m_3.

La relation de deux éléments m_1 et m_2 qui fait que m_1 a un rang plus bas que celui de m_2 dans l'ordre de succession adopté sera exprimé par les formules

$$(1) \qquad m_1 \prec m_2, \qquad m_2 \succ m_1.$$

Ainsi tout ensemble ponctuel défini, porté par une droite illimitée, est un ensemble simplement ordonné, lorsque pour deux points quelconques p_1 et p_2, appartenant à cet ensemble on attribue le rang inférieur à celui dont l'abscisse est la plus

petite (après fixation d'une origine et d'une direction positive).

Il est clair que le même ensemble peut être simplement ordonné de différentes façons. Considérons par exemple l'ensemble R de tous les nombres rationnels positifs $\frac{p}{q}$ (où p et q sont premiers entre eux), qui sont plus petits que 1; on peut les ordonner en les rangeant par grandeur croissante. Mais ils peuvent aussi être ordonnés de la façon suivante (et nous appellerons R_0 l'ensemble ainsi ordonné): des deux nombres $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ pour lesquels les sommes $p_1 + q_1$ et $p_2 + q_2$ sont différentes, celui-là aura le rang inférieur qui correspond à la somme la plus petite; si ces deux sommes sont égales, on attribuera le rang inférieur au plus petit des deux nombres.

Comme à une seule et même valeur de $p + q$ ne correspondent toujours qu'un nombre fini de nombres rationnels différents, notre ensemble ainsi ordonné aura la forme

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots\right)$$

où

$$r_\nu \prec r_{\nu+1}.$$

Lorsque nous parlerons d'un ensemble M *simplement ordonné,* nous nous représenterons toujours ses éléments placés dans un *ordre de succession déterminé* au sens qui vient d'être précisé.

Il y a des ensembles ordonnés d'ordre deux, d'ordre trois, d'ordre ν, d'ordre α, mais nous ne nous en occuperons pas provisoirement. Par suite il nous sera permis d'employer dans la suite l'expression plus courte « ensemble ordonné », alors que nous aurons en vue un « ensemble simplement ordonné ».

A tout ensemble ordonné M correspond un *type ordinal (Ordnungstypus)* déterminé que nous désignerons par

$$\overline{M} \tag{2}$$

Nous entendrons par là *la notion générale qui résulte de* M

lorsque nous faisons abstraction de la nature des éléments m, mais non de leur ordre de succession.

D'après cela, le type ordinal $\overline{M}$ est *lui-même un ensemble ordonné,* dont les éléments sont des *unités perceptibles,* qui ont entre elles le même ordre de succession que les éléments correspondants de M, dont elles résultent par abstraction.

Deux ensembles ordonnés M et N, sont dits *semblables* quand on peut établir entre leurs éléments une correspondance réciproque à sens unique (correspondance biuniforme) telle que m_1 et m_2 étant deux éléments quelconques de M, n_1 et n_2 les éléments correspondants de N, la relation de m_1 à m_2 dans l'ordre de succession de M soit toujours la même que la relation de n_1 à n_2 dans l'ordre de succession de N. Une telle correspondance de deux ensembles semblables sera appelée une « application » *(Abbildung)* de l'un sur l'autre. A chaque partie M_1 de M (qui apparaît évidemment comme un ensemble ordonné) correspond une partie semblable N_1 de N.

Nous exprimerons la similitude de deux ensembles ordonnés M et N par la formule

(3) $$M \simeq N.$$

Tout ensemble ordonné est semblable à lui-même.

Si deux ensembles ordonnés sont semblables à un troisième, ils sont aussi semblables entre eux.

Une simple réflexion montre que *deux ensembles ordonnés ont alors, et seulement alors, le même type ordinal, lorsqu'ils sont semblables; de sorte que l'une quelconque des deux formules*

(4) $$\overline{M} = \overline{N} \qquad M \simeq N$$

est toujours une conséquence de l'autre.

Si dans un type ordinal $\overline{M}$, on fait encore abstraction de l'ordre de succession des éléments, on obtient (§ 1) le nombre cardinal $\overline{\overline{M}}$ de l'ensemble ordonné M, qui est également le nombre cardinal du type $\overline{M}$.

De $\overline{M} = \overline{N}$ résulte toujours $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, c'est-à-dire que deux ensembles ordonnés de même type ont toujours la même puissance ou le même nombre cardinal. La similitude des ensembles ordonnés entraîne toujours leur équivalence; au contraire, deux ensembles ordonnés peuvent être équivalents sans être semblables.

Nous emploierons pour désigner les types ordinaux les petites lettres de l'alphabet grec.

Si α est un type ordinal, nous désignerons par

$$\overline{\alpha} \tag{5}$$

le nombre cardinal correspondant.

Les types des ensembles simplement ordonnés finis n'offrent aucun intérêt particulier. Car on voit facilement que tous les ensembles simplement ordonnés qui correspondent à un nombre cardinal fini ν, sont semblables, et ainsi ont un seul et même type. Ces types sont donc soumis aux mêmes lois que les nombres cardinaux finis et il sera permis d'employer pour eux les mêmes signes $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, bien qu'ils soient une notion différente de celle des nombres cardinaux.

Il en est tout autrement des types des ensembles infinis, car à un nombre cardinal unique correspondent une infinité de types différents d'ensembles simplement ordonnés dont l'ensemble constitue une « classe de types » *(Typenclasse)*.

Chacune de ces classes de types est ainsi déterminée par un nombre cardinal infini a qui est commun à tous les types isolés appartenant à la classe; ce sera la classe de types $[a]$.

Celle de ces classes qui se présente tout d'abord naturellement et dont l'étude complète doit être le but immédiat de la théorie des ensembles transfinis est la classe de types $[\aleph_0]$, qui comprend tous les types qui ont le plus petit nombre cardinal infini $\aleph_0$.

Il importe de distinguer du nombre cardinal a, qui *détermine* la classe des types $[a]$, le nombre cardinal a' qui, *de son côté, est déterminé par la classe des types* $[a]$; ce dernier est

le nombre cardinal qui correspond (§ 1) à la classe de types $[a]$ lorsque celle-ci est considérée comme un ***ensemble bien défini dont les éléments*** sont les divers types α dont le nombre cardinal est a. Nous verrons que a' est différent de a et même qu'il est toujours plus grand.

Si l'on inverse l'ordre de succession de tous les éléments d'un ensemble ordonné de sorte que, de deux éléments, celui qui avait le rang le plus bas acquiert le plus élevé et réciproquement, on obtient de nouveau un ensemble ordonné que nous désignons par

$$(6) \qquad {}^*M$$

et que nous appellerons *l'inverse* de M.

Si $\alpha = \overline{M}$, nous désignerons le type de $^*M$ par

$$(7) \qquad {}^*\alpha.$$

Il peut arriver que $^*\alpha = \alpha$; il en est ainsi, par exemple, pour les types finis et pour le type de l'ensemble R de tous les nombres rationnels qui sont plus grands que 0 et plus petits que 1, lorsqu'on les ordonne par grandeur croissante; nous appellerons ce type η.

Remarquons encore que deux ensembles ordonnés semblables peuvent être représentés l'un sur l'autre d'une ou de plusieurs manières; dans le premier cas, le type considéré est semblable à lui-même d'une seule manière, et dans le deuxième, de plusieurs manières.

Nous verrons que non seulement les types finis, mais aussi les types des ensembles transfinis « bien ordonnés », dont nous nous occuperons plus tard et que nous nommerons *nombres ordinaux transfinis,* n'admettent qu'une seule représentation sur eux-mêmes. Au contraire, le type η est semblable à lui-même d'une infinité de manières.

Deux exemples simples nous permettront d'éclaircir cette différence.

Désignons par ω le type de l'ensemble bien ordonné

$$(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

où

$$e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

et où ν représente un nombre cardinal fini quelconque.

Un autre ensemble bien ordonné de même type

$$(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$$

avec

$$f_\nu \prec f_{\nu+1}$$

ne peut évidemment être représenté sur le premier qu'en faisant correspondre f_ν avec e_ν. Car l'élément e_1 du premier qui a le moindre rang doit correspondre à l'élément qui a le moindre rang dans le second; l'élément e_2 de rang immédiatement supérieur à celui de e_1 doit correspondre à l'élément f_2 dont le rang est immédiatement supérieur à celui de f_1, et ainsi de suite.

Toute autre correspondance à sens unique des éléments des deux ensembles $\{e_\nu\}$ et $\{f_\nu\}$ n'est pas une « application » au sens que nous avons fixé plus haut dans la théorie des types.

Considérons au contraire un ensemble ordonné de la forme

$$\{e_{\nu'}\}$$

où ν' prend toutes les valeurs positives et négatives entières y compris la valeur 0 et où

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1}.$$

Cet ensemble n'a aucun élément de rang inférieur à tous les autres et aucun élément de rang supérieur à tous les autres. D'après la définition de la somme qui sera donnée au § 8, le type de cet ensemble est

$$^*\omega + \omega.$$

Il est semblable à lui-même d'une infinité de manières.

Car si nous considérons un ensemble du même type

$$\{f_{\nu'}\}$$

avec

$$f_{\nu'} \prec f_{\nu'+1}$$

et si ν'_0 désigne un nombre entier quelconque positif ou négatif, les deux ensembles sont appliqués l'un sur l'autre lorsque à l'élément e_ν du premier on fait correspondre l'élément $f_{\nu'_0+\nu'}$, du second; ν'_0 étant arbitraire, on a ainsi une infinité d'applications.

Lorsque la notion de « type » que nous venons de développer est étendue à des « ensembles ordonnés d'ordre multiple », elle comprend, outre la notion introduite au § 1 de « nombre cardinal » ou de « puissance », « tout ce qu'on peut imaginer susceptible de mesure numérique » et elle n'admet dans ce sens aucune généralisation ultérieure. Elle ne contient rien d'arbitraire et n'est que l'extension naturelle de la notion de nombre. *Il faut particulièrement insister sur ce fait que la condition d'égalité* (4) *résulte avec une nécessité absolue de la notion de type et n'admet aucune modification.* C'est dans la méconnaissance de ce principe qu'il faut rechercher la cause principale de la grave erreur qui se trouve dans l'ouvrage de M. G. Veronèse : *Grundzüge der Geometrie* (traduction allemande de A. Schepp, Leipzig, 1894).

Là, à la page 30, « le nombre d'un groupe ordonné » est défini tout à fait de la même façon que notre « type d'un ensemble simplement ordonné ». (*Zur Lehre von Transfiniten,* Halle, 1890. Extrait de *Zeitschrift für Philos. und philos. Kritik,* année 1887.)

Mais M. Véronèse croit devoir compléter la définition de l'égalité. Il dit, page 31 : « Deux nombres dont les unités se correspondent uniformément et dans le même ordre et tels que *l'un n'est pas une partie de l'autre et n'est pas égal à une partie de l'autre,* sont égaux. »

Cette définition de l'égalité contient un cercle et devient un non-sens.

Que signifie : *n'est pas égal à une partie de l'autre?*

Pour répondre à cette question, on doit d'abord savoir quand deux nombres sont égaux ou non. Ainsi *cette définition de l'égalité* (abstraction faite de son arbitraire) *suppose une définition de l'égalité, qui de nouveau suppose une définition de l'égalité, pour laquelle nous devons encore savoir ce qui est égal et ce qui ne l'est pas, et ainsi de suite indéfiniment.*

Après que M. Véronèse a, de cette manière, sacrifié volontairement le fondement indispensable de l'égalité des nombres, on ne doit pas être surpris de l'irrégularité avec laquelle il opère dans la suite sur ses nombres pseudo-transfinis et leur attribue des propriétés qu'ils ne peuvent posséder, car dans la forme imaginée par lui, ils n'ont aucune existence sauf sur le papier. Ainsi devient claire la similitude frappante que ses formations numériques ont avec les plus absurdes « nombres infinis » de Fontenelle (*Géométrie de l'infini*, Paris, 1727).

M. W. Killing a aussi exprimé, dans les *Index lectionum* de l'Académie de Munster, ses scrupules contre les principes du livre de Veronèse.

§ 8. — *Addition et multiplication des types.*

L'ensemble-somme (M,N) de deux ensembles M et N peut aussi, lorsque ces derniers sont ordonnés, être considéré lui-même comme un ensemble ordonné, dans lequel les éléments de M ainsi que les éléments de N conservent entre eux l'ordre de succession qu'ils ont respectivement dans M ou N, tandis que tous les éléments de M ont un rang plus bas que ceux de N.

Si M′ et N′ sont deux autres ensembles ordonnés, $M \simeq M'$, $N \simeq N'$, on aura aussi $(M,N) \simeq (M',N')$; le type de (M,N) ne dépend donc que des types $\overline{M} = \alpha, \overline{N} = \beta$; nous définissons ainsi

$$(1) \qquad \alpha + \beta = \overline{(M, N)}.$$

Dans la somme $\alpha + \beta$, α s'appelle l'*augendus*, β l'*addendus*.

Pour trois types quelconques, on démontre facilement que la loi associative est vraie :

(2) $$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Au contraire, la loi commutative n'est pas exacte en général pour l'addition des types. Nous le verrons déjà par l'exemple suivant :

Soit ω le type, déjà mentionné au § 7, de l'ensemble bien ordonné :

$$E = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \qquad e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

$1 + \omega$ n'est pas égal à $\omega + 1$.

Car si f est un nouvel élément, on a d'après (1)

$$1 + \omega = \overline{(f, E)}$$
$$\omega + 1 = \overline{(E, f)}.$$

Mais l'ensemble

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

est semblable à l'ensemble E, par suite :

$$1 + \omega = \omega.$$

Au contraire, les ensembles E et (E, f) ne sont pas semblables, car le premier n'a aucun terme de rang supérieur à tous les autres, tandis que le dernier en a un f. $\omega + 1$ est donc différent de $\omega = 1 + \omega$.

De deux ensembles ordonnés M et N de types α et β on peut déduire un ensemble ordonné S en remplaçant dans N chaque élément n par un ensemble ordonné M_n qui ait le même type que M.

(3) $$\overline{M}_n = \alpha.$$

De plus, l'ordre de succession des éléments de

$$S = \{M_n\} \tag{4}$$

se déterminera comme il suit :

1° Deux éléments de S qui appartiennent à un même ensemble M_n gardent dans S le même ordre de succession que dans M_n.

2° Deux éléments de S qui appartiennent à deux ensembles différents M_{n_1} et M_{n_2} prennent dans S le même ordre de succession que les éléments n_1 et n_2 dans N.

Il est facile de voir que le type de S ne dépend que des types α et β; nous définissons donc

$$\alpha . \beta = \overline{S}. \tag{5}$$

Dans ce produit α s'appelle le *multiplicande*, β le *multiplicateur*.

Appelons m_n l'élément de M_n qui, par une *application* quelconque, correspond à l'élément m de M.

Nous pouvons alors écrire

$$S = \{m_n\}. \tag{6}$$

Si nous introduisons maintenant un troisième ensemble ordonné $P = \{p\}$, de type $\overline{P} = \gamma$, on a, d'après (5),

$$\alpha . \beta = \{m_n\} \qquad \beta . \gamma = \{n_p\} \qquad (\alpha . \beta) . \gamma = \{(m_n)_p\}$$
$$\alpha . (\beta . \gamma) = \{m_{(n_p)}\}.$$

Mais les deux ensembles ordonnés $\{(m_n)_p\}$ et $\{m_{(n_p)}\}$ sont semblables et sont appliqués l'un sur l'autre lorsque l'on fait correspondre leurs éléments $(m_n)_p$ et $m_{(n_p)}$.

Par suite, pour trois types α, β et γ, la *loi associative* est vraie.

$$(\alpha . \beta) . \gamma = \alpha . (\beta . \gamma .) \tag{7}$$

Enfin de (1) et (5) résulte aussi facilement la *loi distributive*

$$(8) \qquad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma,$$

mais seulement dans le cas où *c'est le multiplicateur qui est une somme.*

Au contraire, la *loi commutative* n'est pas plus vraie pour la multiplication que pour l'addition.

Par exemple, $2.\omega$ et $\omega.2$ *sont des types différents;* car, d'après (5)

$$2.\omega = \overline{(e_1, f_1; e_2, f_2; \ldots; e_\nu, f_\nu; \ldots)} = \omega;$$

tandis que

$$\omega.2 = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots; f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots),$$

qui est évidemment différent de ω.

Si l'on compare les définitions des opérations élémentaires sur les nombres cardinaux données au § 3 avec celles données ici pour les types, on reconnaît facilement que le nombre cardinal d'une somme de deux types est égal à la somme des nombres cardinaux des types isolés et que le nombre cardinal du produit de deux types est égal au produit des nombres cardinaux de ces types.

Toute équation entre les types résultant des deux opérations élémentaires reste donc vraie lorsque l'on y remplace chaque type par son nombre cardinal.

§ 9. — *Le type η de l'ensemble* R *de tous les nombres rationnels, plus grands que* 0 *et plus petits que* 1, *rangés par grandeur croissante.*

Nous désignons par R, comme au § 7, l'ensemble de tous les nombres rationnels $\frac{p}{q}$ (p et q étant premiers entre eux) qui

sont > 0 et < 1, rangés par ordre de grandeur croissante. Nous désignons par η le type de R

$$\eta = \overline{R}. \tag{1}$$

Mais nous avons aussi rangé les éléments de cet ensemble dans un autre ordre; dans ce nouvel ensemble que nous appelions R_0, le rang était déterminé en première ligne par la grandeur de $p + q$ et en deuxième ligne, c'est-à-dire pour les nombres rationnels pour lesquels $p + q$ a la même valeur, par la grandeur de $\frac{p}{q}$ lui-même. Alors R_0 se présente comme un ensemble bien ordonné de type ω.

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots) \quad \text{où } r_\nu \prec r_{\nu+1} \tag{2}$$

$$\overline{R}_0 = \omega \tag{3}$$

R et R_0 ont le même nombre cardinal puisqu'ils ne diffèrent que par l'ordre des éléments, et comme évidemment $\overline{\overline{R}}_0 = \aleph_0$, on a aussi

$$\overline{\overline{R}} = \overline{\eta} = \aleph_0. \tag{4}$$

Le type η appartient donc à la classe de types $[\aleph_0]$.

Nous remarquons en deuxième lieu que dans R il n'y a pas d'élément qui ait un rang inférieur à tous les autres ou supérieur à tous les autres.

En troisième lieu, R a la propriété qu'*entre* deux de ses éléments il en existe toujours d'autres; nous exprimons cette propriété en disant que R est *partout dense (überalldicht)*.

Nous voulons montrer maintenant que ces trois propriétés caractérisent le type η de R, de sorte que l'on a le théorème suivant :

Si un ensemble simplement ordonné M *vérifie les trois conditions :*

1° $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$;

2° M *n'a aucun élément de rang inférieur ni supérieur à tous les autres;*

3° M *est partout dense;*
Le type de M *est égal à* η.

$$\overline{\text{M}} = \eta.$$

Démonstration. — En vertu de la première condition, M peut être mis sous la forme d'un ensemble bien ordonné de type ω; nous le désignons alors par M_0 et nous posons

(5) $$M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots)$$

Nous avons à montrer maintenant que

(6) $$M \simeq R.$$

C'est-à-dire qu'il nous faut prouver que l'on peut représenter M sur R, de façon que l'ordre de succession de deux éléments de M soit le même que celui des deux éléments correspondants de R.

A l'élément r_1 de R on peut faire correspondre l'élément m_1 de M.

r_2 a, relativement à r_1, une certaine position dans R; en vertu de la condition (2) il y a une infinité d'éléments m_ν de M qui ont avec m_1 la même relation dans R que r_2 avec r_1 dans R; nous choisissons *parmi eux* celui qui a dans M_0 le plus petit indice, soit m_{ι_2}, et nous l'adjoignons à r_2.

r_3 a dans R certaines relations de rang avec r_1 et r_2; en vertu des conditions (2) et (3) il y a une infinité d'éléments m_ν de M qui ont les mêmes relations avec m_1 et m_2 dans M que r_3 avec r_1 et r_2 dans R; nous choisissons parmi eux celui qui a dans M_0 le plus petit indice m_{ι_3} et nous l'adjoignons à r_3.

Supposons que l'on continue ainsi l'adjonction; les éléments

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_\nu,$$

de R ont pour images des éléments déterminés

$$m_1,\ m_{\iota_2},\ m_{\iota_3},\ \ldots,\ m_{\iota_\nu},$$

de M qui ont entre eux le même ordre de succession dans M

que les éléments correspondants dans R, et à l'élément $r_{\nu+1}$ de R on fera correspondre l'élément $m_{t_{\nu+1}}$ de M qui a le moindre indice dans M, et qui a, avec

$$m_1,\ m_{t_2},\ m_{t_3},\ \ldots,\ m_{t_\nu},$$

les mêmes relations de rang que $r_{\nu+1}$ avec $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ dans R.

De cette manière, nous avons adjoint à tous les éléments r_ν de R des éléments déterminés m_{t_ν} de M, et ces éléments ont le même ordre de succession que les éléments correspondants dans R.

Mais il nous faut encore montrer que les éléments m_{t_ν} comprennent tous les éléments m_ν ou, ce qui revient au même, que la série

$$1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_\nu,\ \ldots$$

n'est qu'une transposition de la série

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots.$$

Nous démontrerons ceci en prouvant que *si* les éléments $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ sont obtenus par la correspondance, *il en est de même de l'élément suivant* $m_{\nu+1}$.

Prenons α assez grand pour que la suite

$$m_1,\ m_{t_2},\ m_{t_3},\ \ldots\ m_{t_\lambda}$$

contienne les éléments

$$m_{1'},\ m_{2'},\ m_{3'},\ \ldots\ m_{\nu'},$$

(qui, par hypothèse, sont contenus dans la suite infinie $m_1, m_{t_2}, \ldots, m_{t_\nu}, \ldots$). Il peut arriver que $m_{\nu+1}$ se trouve parmi ces éléments $m_1, \ldots, m_{t_\lambda}$, et alors on a bien prouvé que $m_{\nu+1}$ est obtenu par la correspondance.

Mais si $m_{\nu+1}$ n'est pas compris parmi les éléments

$$m_1,\ m_{t_2},\ m_{t_3},\ \ldots\ m_{t_\lambda},$$

$m_{\nu+1}$ a alors avec ces éléments une relation de rang déter-

minée; il y a dans R une infinité d'éléments qui ont avec $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ la même relation, soit $r_{\lambda+\sigma}$ celui d'entre eux qui a dans R_0 le plus petit indice.

On voit facilement alors que $m_{\nu+1}$ a, par rapport aux éléments,

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

la même position dans M que $r_{\lambda+\sigma}$ par rapport à

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{\lambda+\sigma-1},$$

dans R. Comme $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ ont déjà été obtenus par la représentation, $m_{\nu+1}$ est l'élément de moindre indice dans M_0 qui a la même position par rapport à

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}.$$

D'après notre loi d'association on a donc

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}.$$

Notre correspondance nous donne donc bien l'élément $m_{\nu+1}$ et nous voyons ici que l'élément qui lui est adjoint est $r_{\lambda+\sigma}$.

Ainsi, notre loi d'association nous permet de représenter *l'ensemble* M *tout entier sur l'ensemble* R *entier;* M et R sont donc des ensembles semblables. C. Q. F. D.

Du théorème que nous venons de démontrer résultent par exemple les théorèmes suivants :

η *est le type de l'ensemble de tous les nombres rationnels négatifs et positifs, y compris zéro, rangés par grandeur croissante.*

η *est le type de l'ensemble des nombres rationnels plus grands que a et plus petits que b, rangés par grandeur croissante (a et b étant deux nombres réels quelconques* $a < b$*).*

η *est le type de l'ensemble de tous les nombres algébriques réels rangés par grandeur croissante.*

η *est le type de l'ensemble de tous les nombres algébriques rangés par grandeur croissante qui sont plus grands que a*

et plus petits que b, où a et b sont deux nombres réels quelconques, $a < b$.

Car tous ces ensembles ordonnés vérifient les trois conditions exigées de M dans notre théorème. (*Journal de Crelle*, t. LXXVII, p. 258.)

Si nous considérons de plus les ensembles de types $\eta + \eta$, $\eta\eta$, $(1 + \eta)\eta$, $(\eta + 1)\eta$, $(1 + \eta + 1)\eta$, on voit, d'après les définitions données au § 8, que ces trois conditions sont remplies pour chacun d'eux. Donc

(7) $$\eta + \eta = \eta$$
(8) $$\eta\eta = \eta$$
(9) $$(1 + \eta)\eta = \eta$$
(10) $$(\eta + 1)\eta = \eta$$
(11) $$(1 + \eta + 1)\eta = \eta.$$

L'emploi répété des formules (7) et (8) nous conduit, pour un nombre fini ν, aux formules

(12) $$\eta.\nu = \eta$$
(13) $$\eta^\nu = \eta.$$

Au contraire, on voit facilement que pour $\nu > 1$, les types $1 + \eta$, $\eta + 1$, $\nu.\eta$, $1 + \eta + 1$, sont différents entre eux et différents de η.

D'ailleurs on a :

(14) $$\eta + 1 + \eta = \eta.$$

Au contraire $\eta + \nu + \eta$ est différent de η pour $\nu > 1$.

Enfin il est bon d'observer que

(15) $$^*\eta = \eta.$$

§ 10. — *Les séries fondamentales contenues dans les ensembles ordonnés transfinis.*

Considérons un ensemble transfini simplement ordonné quelconque M. Chaque partie de M est un ensemble ordonné. Il y

a certaines parties de M de type ω et $^*\omega$ qui paraissent être particulièrement importantes pour l'étude du type $\overline{M}$. Nous les nommons les ***séries fondamentales du premier ordre contenues dans*** M; les premières, de type ω, seront dites séries ***ascendantes,*** les autres, de type $^*\omega$, séries ***descendantes.***

Comme nous nous bornerons à considérer des séries fondamentales ***du premier ordre*** (dans des recherches ultérieures nous emploierons aussi des ***séries d'ordre supérieur***), nous les nommerons simplement ici ***séries fondamentales.***

Une série fondamentale ascendante est de la forme

(1) $$\{a_\nu\} \quad \text{où } a_\nu \prec a_{\nu+1}$$

et une série fondamentale descendante, de la forme

(2) $$\{b_\nu\} \quad \text{où } b_\nu \succ b_{\nu+1}.$$

Dans toutes nos considérations, ν (ainsi que $\varkappa$, λ, μ) désignera un nombre cardinal fini quelconque ou aussi un type fini relatif à un nombre ordinal fini.

Nous disons que deux séries fondamentales ascendantes $\{a_\nu\}$ et $\{a'_\nu\}$ contenues dans M sont « liées » *(zusammengehörig)* et nous écrivons :

(3) $$\{a_\nu\} \parallel \{a'_\nu\}$$

lorsqu'à chaque élément a_ν on peut adjoindre l'élément a'_λ tel que

$$a_\nu \prec a'_\lambda$$

et qu'à chaque élément a'_ν on peut adjoindre a_μ tel que

$$a'_\nu \prec a_\mu.$$

Deux séries fondamentales descendantes $\{b_\nu\}$ et $\{b'_\nu\}$ contenues dans M sont dites « liées » et nous écrivons

(4) $$\{b_\nu\} \parallel \{b'_\nu\}$$

lorsqu'à chaque élément b_ν on peut adjoindre b'_λ tel que

$$b_\nu \succ b'_\lambda$$

et qu'à chaque élément b'_ν on peut adjoindre b_μ tel que

$$b'_\nu \succ b_\mu.$$

Une série fondamentale ascendante $\{a_\nu\}$ et une série descendante $\{b_\nu\}$ sont dites « liées » et nous écrivons

(5) $$\{a_\nu\} \,||\, \{b_\nu\}$$

lorsque : 1° pour toutes les valeurs de μ et ν on a :

$$a_\nu \prec b_\mu$$

2° il y a en M *au plus un* élément m_0 (c'est-à-dire qu'il y en a un ou pas du tout) tel que pour toutes les valeurs de ν

$$a_\nu \prec m_0 \prec b_\nu.$$

Nous pouvons alors énoncer les théorèmes :

A. *Deux séries fondamentales qui sont liées à une troisième sont aussi liées entre elles.*

B. *Deux séries de même nature, dont l'une est une partie de l'autre, sont toujours liées.*

S'il existe dans M un élément m_0 qui ait, par rapport à la série fondamentale ascendante $\{a_\nu\}$ une position telle que

1° Pour toute valeur de ν

$$a_\nu \prec m_0.$$

2° Pour tout élément m de M qui est $\prec m_0$ il existe un certain nombre ν_0 tel que

$$a_\nu \succ m \quad \text{pour } \nu \geqq \nu_0,$$

nous appellerons m_0 un *élément limite de* $\{a_\nu\}$ *dans* M, ou encore un *élément principal de* M.

De même nous dirons aussi que m_0 est un *élément principal de* M ou un *élément limite de* $\{b_\nu\}$ *dans* M, si les conditions suivantes sont remplies :

1° Pour toute valeur de ν

$$b_\nu \succ m_0.$$

2° Pour tout élément m de M qui est $\succ m_0$, il existe un certain nombre ν_0 tel que

$$b_\nu \prec m \quad \text{pour } \nu \gtreqless \nu_0.$$

Une série fondamentale ne peut avoir plus d'un élément limite dans M; mais M a en général plusieurs éléments principaux.

On reconnaît facilement l'exactitude des propositions :

C. *Si une série fondamentale a un élément limite dans* M, *toutes les séries fondamentales liées avec elle ont dans* M *le même élément limite.*

D. *Si deux séries fondamentales (de même nature ou de nature différente) ont le même élément limite, elles sont liées entre elles.*

Si M et M′ sont deux ensembles ordonnés semblables de sorte que

$$\overline{M} = \overline{M}' \tag{6}$$

et si l'on considère *une application quelconque* des deux ensembles, on voit facilement que les théorèmes suivants sont exacts :

E. *A toute série fondamentale de* M *correspond comme image une série fondamentale de même nature, et réciproquement; à des séries fondamentales liées de* M *correspondent des séries fondamentales liées de* M′, *et réciproquement.*

F. *Si une série fondamentale de* M *possède un élément limite dans* M, *la série fondamentale correspondante de* M′ *a un élément limite dans* M′ ; *ces deux éléments limites sont images l'un de l'autre dans l'application.*

G. *Les éléments principaux de* M *ont pour images les éléments principaux de* M′ *et réciproquement.*

Un ensemble M dont tous les éléments sont des éléments principaux est dit un *ensemble dense (insichdicht).*

Si toute série fondamentale de M a en M un élément limite, nous disons que M est un *ensemble enchaîné (abgeschlossene).*

Un ensemble qui est à la fois dense et enchaîné est dit un *ensemble parfait (perfecte Menge).*

Si un ensemble possède l'un quelconque de ces trois attributs, il en est de même de tout ensemble semblable; ce sont donc aussi des propriétés des types correspondants et il y a, par suite, des *types denses,* des *types enchaînés,* des *types parfaits* et aussi des types *partout denses* (§ 9).

Par exemple, η est un type dense; d'après le § 9, il est aussi partout dense, mais il n'est pas enchaîné.

ω et $^*\omega$ n'ont aucun élément principal; au contraire, $\omega + \nu$ et $\nu + {}^*\omega$ ont chacun un élément principal et sont des types enchaînés.

Le type $\omega.3$ a deux éléments principaux, mais n'est pas enchaîné; le type $\omega.3 + \nu$ a trois éléments principaux et est enchaîné.

§ 11. — *Le type θ du continu linéaire* X.

Nous arrivons maintenant à l'étude du type de l'ensemble $X = \{x\}$ de tous les nombres réels x qui sont ≥ 0 et ≤ 1, rangés dans leur ordre naturel, de sorte que pour deux éléments arbitraires x et x' on ait:

$$(1) \qquad x \prec x' \quad \text{dans le cas où } x < x'.$$

Soit θ ce type.

$$(2) \qquad \overline{X} = \theta.$$

La théorie élémentaire des nombres rationnels et irrationnels montre que chaque série fondamentale $\{x_\nu\}$ de X a un élément limite ν_0 dans X, et que, réciproquement, tout élément x de X est un élément limite de séries fondamentales liées de X. Donc X est un *ensemble parfait,* θ est un *type parfait.*

Mais cela ne caractérise pas encore suffisamment θ, nous avons à considérer bien plus encore la propriété suivante de X:

X *contient* l'ensemble R de η étudié au § 9, et même *de telle*

façon que, entre deux éléments arbitraires x_0 et x_1 de X, il y ait toujours des éléments de R.

Nous voulons montrer maintenant que l'ensemble de ces propriétés caractérise complètement le type θ du contenu linéaire, de sorte que l'on a le théorème :

« *Si un ensemble ordonné* M *présente les caractères suivants: 1° il est parfait, 2° il contient un ensemble* S *de nombre cardinal* $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$, *tel qu'entre deux éléments arbitraires m_0 et m_1 de* M, *il existe toujours des éléments de* S, *on a* $\overline{M} = \theta$. »

Démonstration. — Si S a un élément de rang inférieur à tous les autres ou un élément de rang supérieur à tous les autres, ceux-ci, considérés comme éléments de M, conservent en vertu de 2° le même caractère; nous pouvons donc les séparer de S sans que cet ensemble perde, relativement à M, la propriété exprimée en 2°.

Nous supposons donc dorénavant que S n'ait pas d'élément de rang inférieur ou supérieur à tous les autres; d'après le § 9, S a alors le type η.

Car, comme S est une partie de M, la 2ᵉ condition exprime qu'entre deux éléments s_0 et s_1 de S, il existe d'autres éléments de S. D'ailleurs nous avons $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$.

Les deux ensembles S et R sont par suite semblables.

(3) $$S \simeq R.$$

Prenons pour base une *représentation* quelconque de R sur S. Nous allons montrer qu'il en résulte une représentation déterminée de X sur M, et cela de la manière suivante :

A tous les éléments de X qui appartiennent à l'ensemble R, nous ferons correspondre les éléments de M qui appartiennent aussi à S et précisément ceux qui leur correspondaient dans la représentation de R sur S.

Mais si x_0 est un élément de X n'appartenant pas à R, on peut le considérer comme l'élément limite d'une série fondamentale $\{x_\nu\}$ contenue dans X et qui peut être remplacée par

une série fondamentale $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ qui lui est liée et qui est contenue dans R. A cette dernière série correspond une série fondamentale $\{s_{\lambda_\nu}\}$ de S et de M qui, en vertu de 1°, est limitée par un élément m_0 de M qui n'appartient pas à S (F, § 10). Cet élément m_0 de M (qui reste le même lorsqu'on remplace les séries fondamentales $\{x_\nu\}$ et $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ par une autre quelconque de limite x_0 [E, C, D, § 10]) sera l'image de x_0. Inversement, on fait correspondre à tout élément m_0 de M qui n'appartient pas à S, un élément bien déterminé x_0 de X qui n'appartient pas à R et dont m_0 est l'image.

De cette manière, on établit entre X et M une correspondance biuniforme dont il faut montrer qu'elle est une *application* des deux ensembles.

Cela est immédiat pour les éléments de X et de M qui appartiennent respectivement aux ensembles R et S.

Comparons maintenant un élément r de R à un élément x_0 de X qui n'appartient pas à R; soient s et m_0 les éléments correspondants de M.

Si $r < x_0$, il y a une série fondamentale ascendante $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ qui est limitée par x_0 et il existe un certain nombre ν_0 tel que

$$r < r_{\varkappa_\nu} \quad \text{pour } \nu \gtreqless \nu_0.$$

L'image de $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ dans M est une série fondamentale ascendante $\{s_{\lambda_\nu}\}$ qui est limitée dans M par m_0 et l'on a (§ 10): 1° $s_{\lambda_\nu} \prec m_0$ pour toute valeur de ν; 2° $s \prec s_{\lambda_\nu}$ pour $\nu \geqq \nu_0$; donc (§ 7) $s \prec m_0$.

Si $r > x_0$, on trouve de même $s \succ m_0$.

Si nous considérons enfin deux éléments x_0 et x'_0 de X qui n'appartiennent pas à R, et les deux éléments correspondants de M, m_0 et m'_0, on montre par des considérations analogues que lorsque $x_0 < x'_0$, on a aussi $m_0 \prec m'_0$.

La démonstration de la similitude de X et de M est donc faite et l'on a :

$$\overline{M} = \theta.$$

Halle, mars 1895.



2me ARTICLE[1]

§ 12.

Parmi les ensembles simplement ordonnés, il convient de donner une place toute particulière aux *ensembles bien ordonnés (wohlgeordnete Menge);* leurs types ordinaux, que nous nommerons *nombres ordinaux (Ordnungszahl),* donnent l'élément naturel d'une définition précise des puissances ou nombres cardinaux transfinis supérieurs. Cette définition est tout à fait conforme à celle que le système de tous les nombres entiers ν nous donna pour le plus petit nombre cardinal transfini alef-zéro.

Nous disons qu'un ensemble simplement ordonné F (§ 7) est *bien ordonné* lorsque ses éléments f *s'échelonnent* à partir d'un élément f_1, dans une succession déterminée, de telle sorte que les deux conditions suivantes soient remplies :

I. *Il y a dans* F *un élément initial ou de rang le plus bas,* f_1.

II. *Si* F′ *est une partie de* F, *et si* F *possède un ou plusieurs éléments de rang plus élevé que tous les éléments de* F′, *il existe un élément* f' *de* F *qui suit immédiatement l'ensemble* F′, *de sorte qu'il n'y ait dans* F *aucun élément que son rang place entre* F′ *et* f' (2).

En particulier, tout élément f de F qui n'est pas l'élément d'ordre le plus élevé, est suivi d'un autre élément déterminé f' de rang immédiatement supérieur; ceci résulte de la condi-

---

(1) Publié dans les *Mathematische Annalen.* Bd. 49, p. 207-246.

(2) Sauf les termes employés, cette définition coïncide tout à fait avec celle qui fut donnée dans le volume XXI des *Math. Annalen,* p. 548 (*Grundlagen e. allgem. Mannigfalligkeitslehre,* p. 4).

tion II lorsqu'on choisit pour F′ l'élément unique f. De plus, s'il existe dans F une suite infinie d'éléments échelonnés

$$e' \prec e'' \prec e''' \dots e^{(\nu)} \prec e^{(\nu+1)} \dots$$

telle qu'il y ait dans F des éléments de rang supérieur à celui de tous les $e^{(\nu)}$ et si l'on prend pour F′ l'ensemble $\{e^{(\nu)}\}$, la condition II affirme l'existence d'un élément f' possédant les deux propriétés suivantes : 1° $f' \succ e^{(\nu)}$ pour toutes les valeurs de ν; 2° il n'y a dans F aucun élément g tel que l'on ait à la fois

$$g \prec f' \qquad g \succ e^{(\nu)}$$

pour toutes les valeurs de ν.

Par exemple, les trois ensembles

$$(a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots)$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots, b_1, b_2, \dots, b_\mu, \dots)$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots, b_1, b_2, \dots, b_\mu, \dots, c_1, c_2, c_3),$$

où

$$a_\nu \prec a_{\nu+1} \prec b_\mu \prec b_{\mu+1} \prec c_1 \prec c_2 \prec c_3$$

sont bien ordonnés. Les deux premiers n'ont pas d'élément supérieur, le troisième a l'élément supérieur c_3; dans le deuxième et le troisième, l'élément b_1 vient immédiatement après tous les a_ν; dans le troisième, l'élément c_1 vient immédiatement après tous les a_ν et b_μ.

Dans la suite, nous étendrons à des groupes d'éléments la signification des signes $\prec$ et $\succ$, introduits au § 7 pour marquer la position relative de deux éléments; ainsi les formules

$$M \prec N$$
$$M \succ N$$

exprimeront respectivement que, dans un ordre de succession donné, tous les éléments de l'ensemble M ont des rangs inférieurs ou supérieurs à ceux des éléments de l'ensemble N.

A. *Toute partie* F_1 *d'un ensemble bien ordonné* F *a un élément initial.*

Démonstration.— Si l'élément initial f_1 de F appartient à F_1, il en est en même temps l'élément initial. S'il n'en est pas ainsi, soit F' l'ensemble de tous les éléments de F qui ont un rang inférieur à celui de tous les éléments de F_1; il n'y a aucun élément de F entre F' et F_1.

L'élément f' qui, d'après II, suit immédiatement F', appartient donc nécessairement à F_1 et en est l'élément initial.

B. *Si un ensemble simplement ordonné* F *est tel que* F *et toutes ses parties ont un élément initial,* F *est un ensemble bien ordonné.*

Démonstration.— La condition I est remplie puisque F a un élément initial.

Soit F' une partie de F telle qu'il y ait dans F un ou plusieurs éléments $\succ$ F'; l'ensemble F_1 de tous ces éléments a un élément initial f' qui suit immédiatement l'ensemble F'. La condition II est donc remplie et par suite F est un ensemble bien ordonné.

C. *Toute partie* F' *d'un ensemble bien ordonné est aussi un ensemble bien ordonné.*

Démonstration.— D'après le théorème A, F' et toute partie F'' de F' (qui est également partie de F) a un élément initial; F' est donc, d'après le théorème B, un ensemble bien ordonné.

D. *Tout ensemble* G *semblable à un ensemble bien ordonné* F *est aussi un ensemble bien ordonné.*

Démonstration. — Il résulte immédiatement de la définition de la similitude (§ 7) que tout ensemble N, semblable à un ensemble M ayant un élément initial, possède aussi un élément initial.

Puisque G est semblable à F et que F, comme ensemble bien ordonné, a un élément initial. il en est de même de G.

De même, chaque partie G' de G a un élément initial; car une application de G sur F fait correspondre à l'ensemble G' une partie F' de F.

$$G' \simeq F'.$$

Mais F′ a, d'après le théorème A, un élément initial; il en est de même pour G′. Ainsi G et toutes ses parties G′ ont un élément initial; d'après le théorème B, c'est donc un ensemble bien ordonné.

E. *Si dans un ensemble bien ordonné* G *on substitue, à la place de tous ses éléments* g, *des ensembles bien ordonnés* F_g *de sorte que si* $g \prec g'$, *on ait aussi* $F_g \prec F_{g'}$, *l'ensemble* H *obtenu de cette manière par la réunion de tous les ensembles* F_g *est un ensemble bien ordonné.*

Démonstration. — H, ainsi que toute partie H_1 de H, a un élément initial, ce qui, d'après le théorème B, caractérise H comme ensemble bien ordonné. En effet, si g_1 est l'élément initial de G, l'élément initial de F_{g_1} sera aussi l'élément initial de H.

De plus, les éléments d'une partie H_1 de H appartiennent à des ensembles F_g déterminés qui, pris ensemble, forment une partie de l'ensemble bien ordonné $\{F_g\}$, composé de tous les éléments F_g, et semblable à l'ensemble G; si F_{g_1} est l'élément initial de cette partie, l'élément initial de la partie H_1 contenue dans F_{g_1} est aussi élément initial de H_1.

§ 13. — *Les segments des ensembles bien ordonnés.*

Soit f un élément différent de l'élément initial f_1 de l'ensemble bien ordonné F; l'ensemble A de tous les éléments de F qui sont $\prec f$ sera nommé un *segment de* F (*Abschnitt von* F) et, d'une façon plus précise, le segment de F déterminé par l'élément f. Au contraire, l'ensemble R de tous les autres éléments de F, y compris f, sera appelé le *reste de* F, ou mieux le reste de F déterminé par l'élément f. Le théorème C, § 12, prouve que les ensembles A et R sont bien ordonnés, et nous pouvons écrire, en vertu des § 8 et 12,

(1) $$F = (A, R)$$

(2) $$R = (f, R')$$

(3) $$A \prec R.$$

R′ est la partie de R qui suit l'élément initial f et se réduit à zéro, dans le cas où R n'a pas d'autre élément que f.

Si nous prenons, par exemple, l'ensemble bien ordonné

$$F = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots, c_1, c_2, c_3)$$

l'élément a_3 détermine le segment

$$(a_1, a_2)$$

et le reste

$$(a_3, a_4, \ldots, a_{\nu+2}, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots, c_1, c_2, c_3);$$

l'élément b_1 détermine le segment

$$(a_1, a_2, \ldots, a\ , \ldots)$$

et le reste

$$(b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots, c_1, c_2, c_3);$$

enfin l'élément c_2 détermine le segment

$$(a_1, \ldots, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots, c_1)$$

et le reste

$$(c_2, c_3)$$

Si A et A′ sont deux segments de F déterminés respectivement par les deux éléments f et f', tels que

(4) $$f' \prec f$$

A′ est un segment de A

Nous nommerons alors A′ *le plus petit* et A *le plus grand* segment de F

(5) $$A' < A.$$

Dans le même sens nous pouvons dire aussi de A qu'il est plus petit que F.

(6) $$A < F.$$

A. *Si deux ensembles bien ordonnes semblables* F *et* G, *sont appliqués l'un sur l'autre, à chaque segment* A *de* F *correspond un segment semblable* B *de* G, *et à chaque segment* B *de* G *un segment semblable* A *de* F, *et les éléments* f *et* g, *qui déterminent les segments* A *et* B *ainsi appliqués, se correspondent toujours l'un à l'autre dans l'application.*

Démonstration. — Supposons que l'on ait appliqué l'un sur l'autre deux ensembles simplement ordonnés semblables M et N; soient m et n deux éléments correspondants, M′ l'ensemble de tous les éléments de M qui sont $\prec m$, N′ l'ensemble de tous les éléments de N qui sont $\prec n$; dans ces conditions, l'application fait correspondre M′ et N′. Car, à chaque élément m' de M, qui est $\prec m$, doit correspondre (§ 7) un élément n' de N qui est $\prec n$, et réciproquement.

Si l'on applique ce théorème général aux ensembles bien ordonnés F et G, on obtient la proposition à démontrer.

B. *Un ensemble bien ordonné* F *n'est semblable à aucun de ses segments* A.

Supposons que F $\simeq$ A, et considérons une application de F sur A. D'après le théorème A, le segment A de F aura pour image un segment A′ de A, tel que A′ $\simeq$ A. On aurait donc ainsi A′ $\simeq$ F et A′ $<$ A. Par le même procédé on déduirait de A′ un segment plus petit A″ $\simeq$ F et A″ $<$ A′ et ainsi de suite.

Nous obtiendrions ainsi une série *nécessairement infinie*

$$A > A' > A'' \dots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)} \dots$$

de segments de F devenant de plus en plus petits, mais toujours semblables à l'ensemble F.

En désignant par $f, f', f'', \dots, f^{(\nu)} \dots$, les éléments qui déterminent ces segments, nous aurions

$$f \succ f' \succ f'' \dots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)} \dots$$

et par suite la série infinie

$$(f, f', f'', \dots, f^{(\nu)}, \dots)$$

formerait une partie de F où aucun élément n'aurait le rang le plus bas.

Mais, d'après le théorème A, § 12, de telles parties de F *ne peuvent exister*. L'hypothèse d'une application de F sur l'un de ses segments conduit donc à une contradiction, et par suite l'ensemble F n'est semblable à aucun de ses segments.

Mais si, d'après le théorème B, un ensemble bien ordonné n'est semblable à aucun de ses segments, il y a toujours, si F est *infini*, *d'autres parties* de F qui lui sont semblables. Par exemple, l'ensemble

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$$

est semblable à l'un quelconque de ses restes.

$$(a_{x+1}, a_{x+2}, \ldots, a_{x+\nu}, \ldots)$$

Il est d'ailleurs remarquable que nous puissions adjoindre à la proposition B la suivante :

C. *Un ensemble bien ordonné* F *n'est semblable à aucune partie de l'un quelconque de ses segments* A.

Démonstration. — Supposons que F' soit une partie d'un segment A de F, et que $F' \simeq F$. Considérons une application de F sur F'; d'après le théorème A, le segment A de F aura pour image un segment F'' de l'ensemble bien ordonné F'; ce segment serait déterminé par l'élément f' de F'. Mais f' est aussi élément de A et détermine un segment A' de A, dont F'' est une partie.

L'hypothèse de l'existence d'une partie F' d'un segment A de F, telle que $F' \simeq F$, nous permet donc de construire une partie F'' d'un segment A' de A, telle que $F'' \simeq A$.

Ce procédé de déduction nous donne ensuite une partie F''' d'un segment A'' de A', telle que $F''' \simeq A'$. Nous obtenons ainsi, en poursuivant, comme dans la démonstration du théorème B, une série nécessairement infinie de segments de F devenant de plus en plus petits

$$A > A' > A'' \ldots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)} \ldots$$

Dans la suite infinie des éléments qui déterminent ces segments

$$f \succ f' \succ f'' \dots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)} \dots$$

aucun élément n'aurait le rang le plus bas, ce qui est impossible d'après le théorème A, § 12. Il n'y a donc aucune partie F′ d'un segment A de F, telle que F′ $\simeq$ F.

D. *Deux segments différents* A *et* A′ *d'un ensemble bien ordonné* F *ne sont jamais semblables.*

Démonstration. — Si A′ < A, A′ est un segment de l'ensemble bien ordonné A, et par suite ne peut lui être semblable (théorème B).

E. *Deux ensembles bien ordonnés semblables* F *et* G *ne sont applicables l'un sur l'autre que d'une seule manière.*

Démonstration. — Supposons qu'il y ait deux applications différentes de F sur G, et soit *f* un élément de F, à qui correspondraient, par les deux applications, des images *g* et *g′* différentes dans G. Soient A le segment de F déterminé par *f*, B et B′ les segments de G déterminés par *g* et *g′*. Le théorème A prouve que

$$A \simeq B \quad \text{et} \quad A \simeq B';$$

donc on aurait aussi B $\simeq$ B′, ce qui est contraire au théorème D.

F. *Si* F *et* G *sont deux ensembles bien ordonnés, un segment* A *de* F *ne peut avoir plus d'un segment* B *à lui semblable dans* G.

Démonstration. — S'il y avait dans G deux segments B et B′ semblables au segment A de F, les segments B et B′ seraient aussi semblables, ce qui est contraire au théorème D.

G. *Si* A *et* B *sont deux segments semblables de deux ensembles bien ordonnés* F *et* G, *tout segment* A′ *de* F *plus petit que* A (A′ < A) *est semblable à un segment* B′ *de* G *plus petit que* B (B′ < B), *et inversement.*

La démonstration résulte du théorème A appliqué aux deux ensembles semblables A et B.

H. *Si* A *et* A′ *sont deux segments d'un ensemble bien ordonné* F, *et* B *et* B′ *les segments à eux semblables d'un ensemble bien ordonné* G, *la condition* $A' < A$ *entraîne* $B' < B$.

La démonstration résulte des théorèmes F et G.

I. *Si un segment* B *d'un ensemble bien ordonné* G *n'est semblable à aucun segment d'un ensemble bien ordonné* F, *il en est de même pour tout segment* $B' > B$ *de* G *et pour* G *lui-même.*

La démonstration résulte du théorème G.

K. *Si chaque segment* A *d'un ensemble bien ordonné* F *est semblable à un segment déterminé* B *de l'ensemble bien ordonné* G, *et si chaque segment* B *de* G *est semblable à un segment* A *de* F, *les deux ensembles* F *et* G *sont semblables* ($F \simeq G$).

Démonstration. — Nous pouvons appliquer F et G l'un sur l'autre d'après la loi suivante :

L'élément initial f_1 de F correspondra à l'élément initial g_1 de G. Un autre élément $f \succ f_1$ détermine un segment A de F, auquel correspond par hypothèse un segment semblable unique B de G; l'élément g de G qui détermine le segment B sera l'image de f. De même un élément $g \succ g_1$ détermine dans G un segment B, auquel correspond par hypothèse un segment semblable unique A de F; l'élément f de F, qui détermine le segment A sera l'image de g.

Il est facile de voir que la correspondance biuniforme de F et G, définie de cette manière, est une application au sens du § 7.

Si f et f' sont deux éléments arbitraires de F, g et g' les éléments qui leur correspondent dans G, A, A′, B et B′ les segments déterminés respectivement par f, f', g, g', la condition

$$f' \prec f \quad \text{ou} \quad A' < A$$

entraîne, d'après le théorème H,

$$B' < B$$

et par suite

$$g' \prec g.$$

L. *Si chaque segment* A *d'un ensemble bien ordonné* F *est semblable à un segment déterminé* B *d'un ensemble bien ordonné* G, *et si, au contraire, il y a au moins un segment de* G *qui ne soit semblable à aucun segment de* F, *il existe un segment déterminé* B_1 *de* G, *tel que* $B_1 \simeq F$.

Démonstration. — Considérons l'ensemble de tous les segments de G qui ne sont semblables à aucun segment de F; parmi eux il doit y en avoir un plus petit que tous les autres que nous nommons B_1. Ceci résulte de ce que, d'après le théorème A, § 12, l'ensemble des éléments qui déterminent tous ces segments, possède un élément de rang le plus bas; le segment B_1 de G qu'il détermine, est plus petit que tous les autres. D'après le théorème I, chaque segment de G qui est $> B_1$, n'admet dans F aucun segment semblable; par suite, tous les segments B de G, qui ont dans F des segments semblables, sont tous plus petits que B_1 et même à tout segment $B < B_1$ correspond un segment semblable A de F, puisque B_1 est le plus petit segment de G qui n'est semblable à aucun segment de F.

Ainsi tout segment A de F est semblable à un segment B de B_1, et tout segment B de B_1 à un segment A de F; d'après le théorème K, on a donc

$$F \simeq B_1.$$

M. *Si l'un au moins des segments de l'ensemble bien ordonné* G, *n'est semblable à aucun segment de l'ensemble bien ordonné F, tout segment* A *de* F *est semblable à un segment* B *de* G.

Démonstration. — Soit B_1 le plus petit segment de G auquel ne correspond aucun segment semblable dans F. (Voir la

démonstration de L.) S'il y avait dans F des segments n'admettant dans G aucun segment semblable, l'un d'eux serait plus petit que tous les autres, nous le nommons A_1. A chaque segment de A_1 correspondrait alors un segment semblable de B_1 et à chaque segment de B_1 un segment semblable de A_1. Donc, d'après le théorème K,

$$B_1 \simeq A_1.$$

Mais ceci est contraire à l'hypothèse qu'aucun segment de F n'est semblable à B_1. Il ne peut donc y avoir dans F aucun segment qui ne corresponde à un segment semblable de G.

N. *Si* F *et* G *sont deux ensembles bien ordonnés, il peut se présenter trois cas : 1°* F *et* G *sont semblables; 2° un segment déterminé* B_1 *de* G *est semblable à* F; *3° un segment déterminé* A_1 *de* F *est semblable à* G. *Chacun de ces cas exclut les deux autres.*

Démonstration. — F peut se comporter de trois façons différentes relativement à G :

1° Tout segment A de F est semblable à un segment B de G et inversement ;

2° Tout segment A de F est semblable à un segment B de G; par contre, un segment de G au moins, n'est semblable à aucun segment de F ;

3° Tout segment B de G est semblable à un segment A de F ; par contre, un segment de F au moins, n'est semblable à aucun segment de G.

Le cas où un segment de F n'est semblable à aucun segment de G, et aussi un segment de G n'est semblable à aucun segment de F, est exclu par le théorème M.

Dans le premier cas, le théorème K montre que

$$F \simeq G.$$

Dans le deuxième cas, le théorème L affirme qu'il y a un segment B_1 de G tel que

$$B_1 \simeq F$$

et dans le troisième cas, qu'il y a un segment A_1 de F tel que

$$A_1 \simeq G.$$

Mais on ne peut avoir en même temps $F \simeq G$ et $F \simeq B_1$, car il en résulterait $G \simeq B_1$, ce qui est contraire au théorème B; de même, on ne peut avoir à la fois $F \simeq G$ et $G \simeq A_1$.

De même aussi, l'existence simultanée de $F \simeq B_1$ et $G \simeq A_1$ est impossible; car, d'après le théorème A, la condition $F \simeq B_1$ entraîne l'existence d'un segment B'_1 de B_1 tel que $A_1 \simeq B'_1$. Nous aurions donc aussi $G \simeq B'_1$, ce qui est contraire au théorème B.

O. *Si une partie* F′ *d'un ensemble bien ordonné* F *n'est semblable à aucun segment de* F, *elle est semblable à* F *lui-même.*

Démonstration. — D'après le théorème C, § 12, F′ est un ensemble bien ordonné. Si F′ n'était semblable ni à F, ni à une partie de F, il y aurait, d'après le théorème N, un segment F'_1 de F′ qui serait semblable à F. Mais F'_1 est une partie de ce segment A de F qui est déterminé par l'élément qui détermine le segment F'_1 de F. Par suite, l'ensemble F devrait être semblable à une partie d'un de ses segments, ce qui est contraire au théorème C.

§ 14. — *Les nombres ordinaux des ensembles bien ordonnés.*

D'après le § 7, chaque ensemble simplement ordonné M a un type ordinal déterminé $\overline{M}$; c'est le concept général qui résulte de M lorsque, en tenant compte de l'ordre de succession des éléments, on fait abstraction de leur nature, de sorte qu'ils deviennent de simples unités ayant des positions relatives déterminées. *Tous les ensembles semblables entre eux, et seulement ceux-ci, possèdent le même type ordinal.*

Le type ordinal d'un ensemble bien ordonné F sera nommé un *nombre ordinal (Ordnungszahl).*

Si α et β sont deux nombres ordinaux arbitraires, ils peuvent se comporter, l'un par rapport à l'autre, de trois façons différentes. Soient, en effet, deux ensembles bien ordonnés F et G, tels que

$$\overline{F} = \alpha \qquad \overline{G} = \beta;$$

d'après le théorème N, § 13, trois cas, s'excluant l'un l'autre, peuvent se présenter :

1° $$F \simeq G.$$

2° Il y a un segment déterminé B_1 de G, tel que

$$F \simeq B_1.$$

3° Il y a un segment déterminé A_1 de F, tel que

$$G \simeq A_1.$$

Comme on le voit facilement, ces relations sont encore conservées lorsque F et G sont remplacés par des ensembles respectivement semblables F′ et G′; il en résulte que les types α et β ont, l'un relativement à l'autre, trois positions qui s'excluent mutuellement.

Dans le premier cas, $\alpha = \beta$; *dans le deuxième, nous dirons que* α *est* $< \beta$; *dans le troisième que* α *est* $> \beta$.

Nous obtenons ainsi le théorème :

A. *Si* α *et* β *sont deux nombres ordinaux quelconques, l'on a : ou* $\alpha = \beta$, *ou* $\alpha < \beta$, *ou* $\alpha > \beta$.

De la définition de ces relations de grandeur, il résulte facilement :

B. *Si l'on a trois nombres ordinaux,* α, β, γ, *tels que* $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, *on a aussi* $\alpha < \gamma$.

Les nombres ordinaux forment ainsi, rangés par ordre de grandeur, un ensemble simplement ordonné; nous montrerons plus tard que c'est un ensemble *bien ordonné.*

Les opérations de l'addition et de la multiplication des types ordinaux des ensembles simplement ordonnés, que nous avons

définis au § 8, sont évidemment applicables aux nombres ordinaux.

Si $\alpha = \overline{\overline{F}}$ et $\beta = \overline{\overline{G}}$, où F et G sont deux ensembles bien ordonnés, on a :

$$(1) \qquad \alpha + \beta = \overline{\overline{(F, G)}}.$$

L'ensemble-somme (F, G) est évidemment un ensemble bien ordonné ; nous avons ainsi le théorème :

C. *La somme de deux nombres ordinaux est toujours un nombre ordinal.*

Dans la somme $\alpha + \beta$, α s'appelle l'*augendus* et β l'*addendus*.

Puisque F est un segment de (F, G), on a toujours :

$$(2) \qquad \alpha < \alpha + \beta.$$

Par contre, G n'est pas un segment, mais un reste de (F, G); il peut donc, comme nous l'avons vu au § 13, être semblable à l'ensemble (F, G); si cela n'est pas, G est semblable à un segment de (F, G), d'après le théorème O, § 13. Donc

$$(3) \qquad \beta \leq \alpha + \beta.$$

Nous avons ainsi :

D. *La somme de deux nombres ordinaux est toujours supérieure à l'augendus et supérieure ou égale à l'addendus. L'égalité* $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ *entraîne toujours* $\beta = \gamma$.

En général, $\alpha + \beta$ et $\beta + \alpha$ ne sont pas égaux. Au contraire, si γ est un troisième nombre ordinal, on a :

$$(4) \qquad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

c'est-à-dire :

E. *La loi associative gouverne l'addition des nombres ordinaux.*

Si dans l'ensemble G de type β, on remplace chaque élément g par un ensemble F_g de type α, on obtient un ensemble

bien ordonné H (th. E, § 12) dont le type est complètement déterminé par les types α et β et est appelé le produit $\alpha.\beta$.

(5) $$\overline{\overline{F}}_g = \alpha;$$

(6) $$\alpha.\beta = \overline{\overline{H}}.$$

F. *Le produit de deux nombres ordinaux est toujours un nombre ordinal.*

Dans le produit $\alpha.\beta$, α s'appelle le *multiplicande,* β le *multiplicateur.*

En général, $\alpha.\beta$ *et* $\beta.\alpha$ *ne sont pas égaux.* Mais on a (§ 8) :

(7) $$(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma),$$

c'est-à-dire :

G. *La loi associative gouverne la multiplication des nombres ordinaux.*

La loi distributive n'est applicable, en général, que sous la forme suivante :

(8) $$\alpha.(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Quant à la grandeur du produit, on voit facilement que :

H. *Si le multiplicateur est plus grand que* 1, *le produit de deux nombres ordinaux est toujours supérieur au multiplicande et supérieur ou égal au multiplicateur. L'égalité* $\alpha\beta = \alpha\gamma$ *entraîne toujours* $\beta = \gamma$.

D'ailleurs, on a évidemment :

(9) $$\alpha.1 = 1.\alpha = \alpha.$$

Parlons maintenant de l'opération de la soustraction. Si α et β sont deux nombres ordinaux tels que $\alpha < \beta$, il existe toujours un nombre ordinal déterminé, que nous nommons $\beta - \alpha$ et qui vérifie l'équation

(10) $$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta.$$

Car si $G = \beta$, il y a dans G un segment B tel que $\overline{B} = \alpha$; en nommant S le reste correspondant, nous avons :

$$G = (B, S),$$
$$\beta = \alpha + \overline{S},$$

et ainsi

(11) $$\beta - \alpha = \overline{S}.$$

La détermination de $\beta - \alpha$ résulte de ce que le segment B de G, et par suite le reste S, sont parfaitement déterminés (th. D, § 13).

Nous déduisons encore des formules (4), (8), (10) les suivantes :

(12) $$(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha;$$

(13) $$\gamma(\beta - \alpha) = \gamma\beta - \gamma\alpha.$$

Il est à remarquer que l'on peut toujours faire la somme d'un nombre infini de nombres ordinaux; cette somme est un nombre ordinal déterminé, dépendant de l'ordre de succession des ensembles sommés.

Soit par exemple

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$$

une suite simplement infinie quelconque de nombres ordinaux :

(14) $$\beta_\nu = \overline{G}_\nu$$

l'ensemble

(15) $$G = (G_1, G_2, \ldots, G_\nu, \ldots)$$

est un ensemble bien ordonné (th. E, § 12) dont le nombre ordinal β représente la somme des β_ν. Nous avons ainsi :

(16) $$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu + \ldots = \overline{G} = \beta,$$

et l'on a toujours, comme il résulte facilement de la définition du produit :

(17) $$\gamma(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu + \ldots) = \gamma\beta_1 + \gamma\beta_2 + \ldots + \gamma\beta_\nu + \ldots$$

En posant

(18) $$\alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu,$$

il vient

(19) $$\alpha_\nu = \overline{(G_1, G_2, \dots, G_\nu)}.$$

De plus

(20) $$\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$$

et les nombres β_ν s'expriment d'après (10), à l'aide des nombres α comme il suit :

(21) $$\beta_1 = \alpha_1 \qquad \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu.$$

La série

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$$

est une série infinie *quelconque* de nombres ordinaux qui remplissent la condition (20); nous l'appellerons une *série fondamentale* de nombres ordinaux; la relation qui l'unit à β peut s'exprimer de la manière suivante :

1° β est $> \alpha_\nu$ pour toutes valeurs de ν, car l'ensemble $(G_1, G_2, \dots, G_\nu)$, dont le nombre ordinal est α_ν, est un segment de l'ensemble G qui a le nombre ordinal β.

2° Si β' est un nombre ordinal *quelconque* $< \beta$, on a toujours, à partir d'une certaine valeur de ν,

$$\alpha_\nu > \beta'$$

car si β' est $< \beta$, il y a dans l'ensemble G un segment B′ de type β'. L'élément qui détermine ce segment doit appartenir à l'une des parties G_ν, soit G_{ν_0}. Mais alors B′ est aussi segment de $(G_1, G_2, \dots, G_{\nu_0})$ et par suite

$$\beta' < \alpha_\nu$$

Donc $\alpha_\nu > \beta'$ pour $\nu \geqq \nu_0$.

Ainsi β *est le nombre immédiatement supérieur à tous les* α_ν; nous le nommerons la limite de α_ν pour ν croissant indéfiniment et le désignerons par lim. α_ν, de sorte que, d'après (16) et (21) :

(22) $$\lim.\ \alpha_\nu = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2) + \dots + (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu) + \dots$$

Nous pouvons rassembler tout ce qui précède dans l'énoncé suivant :

I. *A chaque série fondamentale* $\{\alpha_\nu\}$ *de nombres ordinaux correspond un nombre ordinal lim.* α_ν, *qui est immédiatement supérieur à tous les* α_ν; *il est représenté par la formule* (22).

Si γ désigne un nombre ordinal fixe, on démontre facilement, avec l'aide des formules (12), (13) et (17), les théorèmes contenus dans les formules suivantes :

$$\text{(23)} \qquad \lim.(\gamma + \alpha_\nu) = \gamma + \lim \alpha_\nu;$$

$$\text{(24)} \qquad \lim.\gamma\alpha_\nu = \gamma.\lim.\alpha_\nu.$$

Nous avons déjà mentionné au § 7 que tous les ensembles simplement ordonnés de nombre cardinal *fini* ν ont le même type d'ordre ν. La démonstration est la suivante. Tout ensemble simplement ordonné de nombre cardinal *fini* est un ensemble *bien ordonné;* car il doit, ainsi que toutes ses parties, avoir un élément initial, ce qui (th. B, § 12) caractérise un ensemble bien ordonné.

Les types des ensembles simplement ordonnés finis ne sont donc pas autre chose que les *nombres ordinaux finis*. Un même nombre cardinal ν ne peut correspondre à deux nombres ordinaux différents α et β. Si, en effet, α est $< \beta$ et $\overline{G} = \beta$, il existe, comme nous le savons, un segment B de G tel que $\overline{B} = \alpha$.

L'ensemble G et sa partie B auraient donc le même nombre cardinal, ce qui est impossible (th. C, § 6).

Les *nombres ordinaux finis* coïncident donc dans leurs propriétés avec les *nombres cardinaux finis*. Il en est tout autrement pour les *nombres ordinaux transfinis;* à un même nombre cardinal $\mathfrak{a}$ correspond un nombre infini de nombres ordinaux formant un système que nous nommons la classe numérique $Z(\mathfrak{a})$. C'est une partie de la classe de types $[\mathfrak{a}]$ (§ 7).

La classe numérique Z ($\aleph_0$), que nous nommerons la

deuxième classe numérique, sera l'objet immédiat de notre étude.

La *première classe numérique* est formée par l'ensemble $\{\nu\}$ de tous les nombres ordinaux finis.

§ 15. — *Les nombres de la deuxième classe numérique* $Z(\aleph_0)$.

La deuxième classe numérique $Z(\aleph_0)$ *est l'ensemble* $\{\alpha\}$ *de tous les types ordinaux des ensembles bien ordonnés de nombre cardinal* $\aleph_0$.

A. *La deuxième classe numérique a un nombre plus petit que tous les autres* $\omega = \lim. \nu$.

Démonstration. — ω est le type de l'ensemble bien ordonné

$$(1) \qquad F_0 = (f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$$

où ν parcourt tous les nombres ordinaux finis, et

$$(2) \qquad f_\nu \prec f_{\nu+1}.$$

On a ainsi (§ 7)

$$(3) \qquad \omega = \overline{F_0}$$

et (§ 6)

$$(4) \qquad \overline{\overline{\omega}} = \aleph_0.$$

ω est donc un nombre de la deuxième classe et c'est précisément le plus petit. Car si γ est un nombre ordinal quelconque $< \omega$, il doit être le type d'un segment de F_0 (§ 14). Mais les segments de F_0

$$A = (f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$$

ont un nombre ordinal fini ν. Donc $\gamma = \nu$.

Il n'y a donc aucun nombre ordinal *transfini* qui soit plus petit que ω; ω est ainsi le plus petit nombre ordinal transfini.

D'après les explications données au § 14, on a évidemment $\omega = \lim. \nu$.

B. *Si* α *est un nombre de la deuxième classe, le nombre immédiatement supérieur de la même classe est* $\alpha + 1$.

Démonstration. — Soit F un ensemble bien ordonné de type α et de nombre cardinal $\aleph_0$.

(5) $$\overline{F} = \alpha;$$

(6) $$\overline{\alpha} = \aleph_0.$$

En désignant par g un nouvel élément, nous avons

(7) $$\alpha + 1 = \overline{(F, g)}.$$

Comme F est un segment de (F, g), nous avons

(8) $$\alpha + 1 > \alpha.$$

De plus

$$\overline{\alpha + 1} = \overline{\alpha} + 1 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 \quad (\S\ 6).$$

Le nombre $\alpha + 1$ appartient donc à la deuxième classe. Mais entre α et $\alpha + 1$ il n'y a aucun nombre ordinal; car tout nombre γ qui est $< \alpha + 1$, est le type d'un segment de (F, g) qui ne peut être que F ou un segment de F; γ est donc $\leq \alpha$.

C. *Si* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots,$ *est une série fondamentale de nombres de la première ou de la deuxième classe, le nombre immédiatement supérieur* $\lim. \alpha_\nu$ (§ 14) *appartient à la deuxième classe.*

Démonstration. — D'après le § 14, le nombre $\lim. \alpha_\nu$ se déduit de la série fondamentale $\{\alpha_\nu\}$ de la façon suivante : on forme la série $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots,$ telle que

$$\beta_1 = \alpha_1 \qquad \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ldots \qquad \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu, \ldots$$

et l'on considère les ensembles bien ordonnés $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$, tels que

$$\overline{G_\nu} = \beta_\nu$$

et enfin l'ensemble

$$G = (G_1, G_2, \ldots, G_\nu, \ldots)$$

qui est aussi bien ordonné. Alors

$$\lim.\ \alpha_\nu = G.$$

Il s'agit de démontrer que

$$\overline{\overline{G}} = \aleph_0.$$

Mais comme les nombres β_1, β_2, ..., β_ν, ..., appartiennent à la première ou à la deuxième classe, on a

$$\overline{\overline{G}}_\nu \leq \aleph_0;$$

donc

$$\overline{\overline{G}} \leq \aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0,$$

et puisque G est toujours un ensemble transfini, le cas $\overline{\overline{G}} < \aleph_0$ est exclu.

Deux *séries fondamentales* $\{\alpha_\nu\}$ et $\{\alpha'_\nu\}$ de nombre de la première et de la deuxième classe numérique sont dites *liées* (§ 10) *(zusammengehörig)* et nous écrivons coherent

(9) $$\{\alpha_\nu\} \,||\, \{\alpha'_\nu\}$$

lorsqu'à chaque nombre fini ν, on peut faire correspondre deux nombres λ_0, μ_0, tels que

(10) $$\alpha'_\lambda > \alpha \quad \text{si} \quad \lambda \geq \lambda_0,$$

(11) $$\alpha_\mu > \alpha'_\nu \quad \text{si} \quad \mu \geq \mu_0.$$

D. *Les nombres lim.* α_ν *et lim.* α'_ν, *correspondant à deux séries fondamentales* $\{\alpha_\nu\}$ et $\{\alpha'_\nu\}$, *sont alors et seulement alors égaux, lorsque* $\{\alpha_\nu\} \,||\, \{\alpha'_\nu\}$.

Démonstration. — Posons pour abréger lim. $\alpha_\nu = \beta$, lim. $\alpha'_\nu = \gamma$.

Supposons d'abord $\{\alpha_\nu\} \,||\, \{\alpha'_\nu\}$; nous affirmons que $\beta = \gamma$. Si en effet β n'était pas égal à γ, on aurait par exemple $\beta < \gamma$. A

partir d'un certain nombre ν, α'_ν serait donc plus grand que β (§ 14) et par suite, à partir d'un certain nombre μ, α_μ serait plus grand que β (11). Mais ceci est impossible, puisque $\beta = \lim. \alpha_\nu$ et que l'on a, pour toutes les valeurs de μ, $\alpha_\mu < \beta$.

Réciproquement, si l'on suppose que $\beta = \gamma$, α_ν est constamment plus petit que γ et, par suite, à partir d'un certain nombre λ, $\alpha'_\lambda > \alpha_\nu$; de même, puisque $\alpha'_\nu < \beta$, à partir d'un certain nombre μ, α_μ sera plus grand que α'_ν; donc $\{\alpha_\nu\} \parallel \{\alpha'_\nu\}$.

E. *Si α est un nombre quelconque de la deuxième classe numérique, ν_0 un nombre ordinal fini quelconque, on a : $\nu_0 + \alpha = \alpha$ et par suite $\alpha - \nu_0 = \alpha$.*

Démonstration. — Examinons d'abord le cas où $\alpha = \omega$. Soit

$$\omega = \overline{(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)}$$

$$\nu_0 = \overline{(g_1, g_2, \ldots, g_{\nu_0})}$$

$$\nu_0 + \omega = \overline{(g_1, g_2, \ldots, g_{\nu_0}, f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)} = \omega.$$

Mais si $\alpha > \omega$, nous avons

$$\alpha = \omega + (\alpha - \omega)$$

$$\nu_0 + \alpha = \nu_0 + \omega + (\alpha - \omega) = \omega + (\alpha - \omega) = \alpha.$$

F. *Si ν_0 est un nombre ordinal fini quelconque, $\nu_0 . \omega = \omega$.*

Démonstration. — Pour obtenir un ensemble de type $\nu_0 \omega$, il faut remplacer les éléments f_ν de l'ensemble $(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$ par des ensembles $(g_{\nu 1}, g_{\nu 2}, \ldots, g_{\nu \nu_0})$ de type ν_0. On obtient ainsi l'ensemble

$$(g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{1\nu_0}, g_{21}, \ldots, g_{2\nu_0}, \ldots, g_{\nu 1}, \ldots, g_{\nu\nu_0}, \ldots)$$

qui est évidemment semblable à l'ensemble $\{f_\nu\}$, donc

$$\nu_0 \omega = \omega.$$

On peut aussi le démontrer brièvement comme il suit : on a $\omega = \lim. \nu$ et par suite, d'après (24), § 14,

$$\nu_0 \omega = \lim. \nu_0 \nu.$$

D'ailleurs

$$\{\nu_0\nu\} \parallel \{\nu\}$$

$$\lim.\, \nu_0\nu = \lim.\, \nu = \omega.$$

Donc

$$\nu_0\omega = \omega.$$

G. *Si α est un nombre de la deuxième classe, ν_0 un nombre de la première, on a toujours*

$$(\alpha + \nu_0)\omega = \alpha\omega.$$

Démonstration. — Nous avons

$$\lim.\, \nu = \omega.$$

Donc, d'après (24), § 14,

$$(\alpha + \nu_0)\omega = \lim.\, (\alpha + \nu_0)\nu.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}(\alpha + \nu_0)\nu &= (\alpha \underset{1}{+} \nu_0) + (\alpha \underset{2}{+} \nu_0) + \ldots + (\alpha \underset{\nu}{+} \nu_0) \\ &= \alpha + (\nu_0 \underset{1}{+} \alpha) + (\nu_0 \underset{2}{+} \alpha) + \ldots + (\nu_0 \underset{\nu-1}{+} \alpha) + \nu_0 \\ &= \alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha + \nu_0 \\ &= \alpha\nu + \nu_0.\end{aligned}$$

Il est maintenant facile de voir que

$$\{\alpha\nu + \nu_0\} \parallel \{\alpha\nu\}$$

et par suite que

$$(\alpha + \nu_0)\omega = \lim.\, (\alpha\nu + \nu_0) = \lim.\, \alpha\nu = \alpha\omega.$$

H. *Si α est un nombre quelconque de la deuxième classe, l'ensemble $\{\alpha'\}$ de tous les nombres α' des première et deuxième classes qui sont plus petits que α, rangés par ordre de grandeur croissante, est un ensemble bien ordonné de type α.*

Démonstration. — Soit F un ensemble bien ordonné tel que $\overline{F} = \alpha$, et f_1 l'élément initial de F. Si α' est un nombre

ordinal plus petit que α, il y a (§ 14) un segment déterminé A′ de F, tel que

$$\overline{A'} = \alpha',$$

et réciproquement chaque segment A′ a comme type un nombre $\alpha' < \alpha$ de la première ou de la deuxième classe; car puisque $\overline{\overline{F}} = \aleph_0$, $\overline{\overline{A'}}$ ne peut être qu'un nombre cardinal fini ou $\aleph_0$.

Le segment A′ est déterminé par un élément $f' \succ f_1$ de F et réciproquement chaque élément $f' \succ f_1$ de F détermine un segment A′ de F. Si les deux éléments f' et $f'' \succ f_1$ déterminent dans F les segments A′ et A″ dont les types ordinaux sont α' et α'', la condition $f' \prec f''$ entraîne (§ 13) $A' < A''$ et par suite $\alpha' < \alpha''$.

Si donc nous posons $F = (f_1, F')$ et si nous faisons correspondre à l'élément f' de F′ l'élément α' de $\{\alpha'\}$, nous obtenons une application de ces deux ensembles. Donc

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{F'}.$$

Mais maintenant $\overline{F'} = \alpha - 1$, et d'après le théorème E, $\alpha - 1 = \alpha$. Donc

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha.$$

Comme $\bar{\alpha} = \aleph_0$, il en résulte $\overline{\overline{\{\alpha'\}}} = \aleph_0$, ce qui s'énonce :

I. *L'ensemble $\{\alpha'\}$ de tous les nombres α' de la première et de la deuxième classe qui sont plus petits qu'un nombre α de la deuxième classe a le nombre cardinal $\aleph_0$.*

K. *Tout nombre α de la deuxième classe numérique peut s'obtenir ou en ajoutant 1 à un nombre immédiatement inférieur $\underline{\alpha}_1$*

$$\alpha = \underline{\alpha}_1 + 1$$

ou en cherchant la limite d'une série fondamentale $\{\alpha_\nu\}$ de nombres de la première ou de la deuxième classe.

$$\alpha = \lim \alpha_\nu.$$

Démonstration. — Soit $\alpha = \overline{F}$. Si F a un élément g de rang plus élevé que tous les autres, on a $F = (A, g)$ où A est le segment déterminé par g dans F. C'est alors le premier cas, on a

$$\alpha = \overline{A} + 1 = \underline{\alpha_1} + 1.$$

Il existe alors un nombre immédiatement inférieur à α qui est nommé $\underline{\alpha_1}$.

Si F ne possède aucun élément supérieur, considérons l'ensemble $\{\alpha'\}$ de tous les nombres de la première et de la deuxième classe qui sont plus petits que α. Cet ensemble où les éléments sont rangés par ordre de grandeur croissante est semblable à l'ensemble F (th. H); parmi les nombres α', aucun donc n'est supérieur à tous les autres. D'après le théorème I, l'ensemble $\{\alpha'\}$ peut se mettre sous la forme d'une série simplement infinie $\{\alpha'_\nu\}$. Dans cette suite, après le terme α'_1 peuvent se présenter d'abord des termes plus petits $\alpha'_2, \alpha'_3, \ldots$, mais il y aura certainement des termes plus grands; car α'_1 ne peut être plus grand que tous les autres termes puisqu'un tel terme n'existe pas parmi les nombres $\{\alpha'_\nu\}$. Soit α'_{ρ_2} le terme de plus petit indice supérieur à α'_1. Soit de même α'_{ρ_3} le terme de plus petit indice supérieur à α'_{ρ_2}. En poursuivant ainsi, nous obtenons une série infinie de nombres croissants, c'est-à-dire une série fondamentale

$$\alpha'_1, \alpha'_{\rho_2}, \alpha'_{\rho_3}, \ldots, \alpha'_{\rho_\nu}, \ldots$$

Nous avons

$$1 < \rho_2 < \rho_3 < \ldots < \rho_\nu < \rho_{\nu+1}, \ldots$$

$$\alpha'_1 < \alpha'_{\rho_2} < \alpha'_{\rho_3} < \ldots < \alpha'_{\rho_\nu} < \alpha'_{\rho_{\nu+1}} \ldots$$

$$\alpha'_\mu < \alpha'_{\rho_\nu} \quad \text{lorsque} \quad \mu < \rho_\nu$$

et comme évidemment $\nu \leq \rho_\nu$, nous avons

$$\alpha'_\nu \leq \alpha'_{\rho_\nu}.$$

Il en résulte que tout nombre α'_ν et par suite tout nombre

$\alpha' < \alpha$ est surpassé par les nombres α'_{ρ_ν} pour des valeurs suffisamment grandes de ν.

Mais α est le nombre immédiatement supérieur à tous les α'; par suite il est aussi le nombre immédiatement supérieur à tous les α'_{ρ_ν}. Donc, si nous posons $\alpha'_1 = \alpha_1\ \alpha'_{\rho_\nu + 1} = \alpha_{\nu + 1}$, il vient

$$\alpha = \lim. \alpha_\nu.$$

Il résulte des théorèmes B, C, ..., K, que les nombres de la deuxième classe s'engendrent de deux manières à partir des nombres plus petits. Les uns que nous nommerons *nombres de première espèce,* sont obtenus en ajoutant 1 à un nombre immédiatement inférieur

$$\alpha = \underline{\alpha_1} + 1;$$

les autres que nous nommerons *nombres de deuxième espèce,* sont tels *qu'il n'y a pas pour eux de nombre immédiatement inférieur* $\underline{\alpha_1}$; ils sont définis comme limites de séries fondamentales par la formule

$$\alpha = \lim. \alpha_\nu$$

α est ici le nombre immédiatement supérieur à tous les nombres α_ν.

Ces deux façons d'engendrer de grands nombres à partir de plus petits, seront nommés *le premier et le deuxième principe de formation* des nombres de la deuxième classe.

§ 16. — *La puissance de la deuxième classe numérique est égale au deuxième nombre cardinal transfini alef-un.*

Avant de commencer, aux paragraphes suivants, l'étude détaillée des nombres de la deuxième classe et des principes qui les dominent, nous voulons rechercher quel nombre cardinal correspond à la classe $Z(\aleph_0) = \{\alpha\}$ de tous ces nombres.

A. *L'ensemble $\{\alpha\}$ de tous les nombres de la deuxième classe, rangés par ordre de grandeur croissante, est un ensemble bien ordonné.*

Démonstration. — Désignons par A_α la réunion de tous les nombres de la *deuxième* classe, qui sont plus petits qu'un nombre donné α, ces nombres étant rangés par ordre de grandeur croissante; A_α est un ensemble bien ordonné de type $\alpha - \omega$. Ceci résulte du théorème H, § 14. L'ensemble désigné là par $\{\alpha'\}$, de tous les nombres α' de la *première* et de la *deuxième* classe est composé de $\{\nu\}$ et de A_α, de sorte que

$$\{\alpha'\} = (\{\nu\}, A_\alpha)$$
$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{\{\nu\}} + \overline{A_\alpha};$$

et comme

$$\overline{\overline{\{\alpha'\}}} = \alpha \qquad \overline{\overline{\{\nu\}}} = \omega,$$

on a

$$\overline{\overline{A_\alpha}} = \alpha - \omega.$$

Soit J une partie quelconque de $\{\alpha\}$, telles qu'il y ait dans $\{\alpha\}$ des nombres plus grands que tous les nombres de J. Soit par exemple α_0 un de ces nombres. J est aussi une partie de A_{α_0+1} telle qu'au moins le nombre α_0 de A_{α_0+1} est plus grand que tous les nombres de J. Comme A_{α_0+1} est un ensemble bien ordonné, il doit exister (§ 12) un nombre α' de A_{α_0+1}, appartenant donc aussi à $\{\alpha\}$, qui va immédiatement après tous les nombres de J. La condition II, § 12, est donc remplie pour $\{\alpha\}$, et la condition I aussi, puisque $\{\alpha\}$ a le nombre initial ω. —

Si l'on applique à l'ensemble bien ordonné $\{\alpha\}$ les théorèmes A et C, § 12, on obtient les théorèmes suivants :

B. *Tout ensemble de nombres différents des première et deuxième classes a un nombre plus petit, un minimum.*

C. *Tout ensemble de nombres différents des première et deuxième classes, rangés par ordre de grandeur, forme un ensemble bien ordonné.*

Nous allons maintenant montrer que la puissance de la deuxième classe est différente de celle de la première, qui est $\aleph_0$.

D. *La puissance de l'ensemble* $\{\alpha\}$ *de tous les nombres* α *de la deuxième classe n'est pas égale à* $\aleph_0$.

Démonstration. — Si $\overline{\overline{|\alpha|}}$ était égal à $\aleph_0$, on pourrait mettre l'ensemble $\{\alpha\}$ sous la forme d'une série simplement infinie.

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \ldots$$

de sorte que $\{\gamma_\nu\}$ représenterait la réunion de *tous* les nombres de la deuxième classe rangés dans un ordre différent de l'ordre de grandeur croissante; de plus, $\{\gamma_\nu\}$ comme $\{\alpha\}$ ne contient pas de nombre supérieur à tous les autres.

Partons de γ_1 et soit γ_{ρ_2} le terme de plus petit indice de la série qui soit plus grand que γ_1, γ_{ρ_3} le terme de plus petit indice plus grand que γ_{ρ_2}, et ainsi de suite. Nous obtenons une suite infinie de nombres croissants

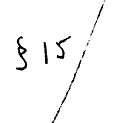
$$\gamma_1, \gamma_{\rho_2}, \ldots, \gamma_{\rho_\nu}, \ldots$$

telle que

$$1 < \rho_2 < \rho_3 \ldots \rho_\nu < \rho_{\nu+1} \ldots$$

$$\gamma_1 < \gamma_{\rho_2} < \gamma_{\rho_3} \ldots \gamma_{\rho_\nu} < \gamma_{\rho_{\nu+1}} \ldots$$

$$\gamma_\nu \leq \gamma_{\rho_\nu}$$



D'après le théorème C, § 14, il y aurait un nombre déterminé δ de la deuxième classe, savoir

$$\delta = \lim . \gamma_{\rho_\nu}$$

qui serait plus grand que tous les γ_{ρ_ν}; par suite δ serait plus grand que γ_ν pour toute valeur de ν.

Mais puisque $\{\gamma_\nu\}$ contient tous les nombres de la deuxième classe, il contient aussi δ et l'on aurait

$$\delta = \gamma_{\nu_0}$$

équation qui est incompatible avec $\delta > \gamma_{\nu_0}$.

L'hypothèse $\overline{\overline{|\alpha|}} = \aleph_0$ conduit ainsi à une contradiction.

E. *Un ensemble arbitraire* $\{\beta\}$ *de nombres différents de la deuxième classe a, s'il est infini, ou le nombre cardinal* $\aleph_0$, *ou le nombre cardinal* $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ *de la deuxième classe.*

Démonstration. — L'ensemble $\{\beta\}$, où les éléments sont rangés par ordre de grandeur croissante, est une partie de l'ensemble bien ordonné $\{\alpha\}$ et comme tel (th. O, § 13), il est ou semblable à un segment A_{α_0} de ce dernier (c'est-à-dire à l'ensemble de tous les nombres de la deuxième classe $< \alpha_0$, rangés par ordre de grandeur croissante) ou semblable à l'ensemble $\{\alpha\}$ lui-même.

Nous avons montré dans la démonstration du théorème A que $\overline{A_{\alpha_0}} = \alpha_0 - \omega$. Nous avons donc ou $\overline{\{\beta\}} = \alpha_0 - \omega$ ou $\overline{\{\beta\}} = \overline{\{\alpha\}}$ et, par suite, ou $\overline{\overline{\{\beta\}}} = \overline{\overline{\alpha_0 - \omega}}$ ou $\overline{\overline{\{\beta\}}} = \overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Mais $\overline{\overline{\alpha_0 - \omega}}$ est égal à un nombre cardinal fini ou à $\aleph_0$ (th. I, § 15); le premier cas est exclu ici puisque $\{\beta\}$ est un ensemble infini. Par suite, le nombre cardinal $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ est égal à $\aleph_0$ ou à $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$.

F. *La puissance de la deuxième classe numérique* $\{\alpha\}$ *est le deuxième nombre cardinal transfini alef-un.*

Démonstration. — Il n'y a aucun nombre *cardinal a* qui soit $> \aleph_0$ et $< \overline{\overline{\{\alpha\}}}$, car il devrait y avoir une partie infinie $\{\beta\}$ de $\{\alpha\}$ telle que $\overline{\overline{\{\beta\}}} = a$.

Mais par suite du théorème précédemment démontré E, la partie β a le nombre cardinal $\aleph_0$ ou le nombre cardinal $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Ce dernier nombre est donc nécessairement le nombre cardinal immédiatement supérieur à $\aleph_0$; nous le nommerons $\aleph_1$.

Nous avons donc, dans la deuxième classe numérique, le *représentant* naturel du deuxième nombre cardinal transfini *alef-un.*

§ 17. — *Les nombres de la forme* $\omega^{\mu}\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \ldots + \nu_{\mu}$.

Il est utile de se familiariser avec les nombres de $Z(\aleph_0)$, qui sont des fonctions algébriques de degré fini de ω. Tout nombre

de cette espèce peut se ramener à la forme suivante, et cela d'une seule manière

$$(1)\qquad \varphi = \omega^{\mu}\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \ldots + \nu_{\mu},$$

où μ, ν_0 sont finis et différents de zéro, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu}$ pouvant être nuls.

Ceci repose sur ce fait que

$$(2)\qquad \omega^{\mu'}\nu' + \omega^{\mu}\nu = \omega^{\mu}\nu,$$

si

$$\mu' < \mu, \qquad \nu > 0 \quad \text{et} \quad \nu' > 0;$$

car, d'après (8), § 14,

$$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^{\mu}\nu = \omega^{\mu'}(\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu)$$

et

$$\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu = \omega^{\mu-\mu'}\nu.$$

Donc, dans un agrégat de la forme

$$\ldots + \omega^{\mu'}\nu' + \omega^{\mu}\nu + \ldots$$

on peut négliger tous les termes qui sont suivis, en allant vers la droite, de termes de degrés supérieurs en ω. Ce procédé peut être suivi jusqu'à ce qu'on arrive à la forme donnée en (1). Remarquons encore que

$$(3)\qquad \omega^{\mu}\nu + \omega^{\mu}\nu' = \omega^{\mu}(\nu + \nu').$$

Comparons maintenant le nombre φ avec un nombre ψ de la même espèce

$$(4)\qquad \psi = \omega^{\lambda}\rho_0 + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \ldots + \rho_{\lambda}.$$

Si μ et λ sont différents et par exemple $\mu < \lambda$, nous avons, d'après (2),

$$\varphi + \psi = \psi$$

et par suite

$$\varphi < \psi.$$

Si μ et λ sont égaux, ν_0 et ρ_0 différents et, par exemple, $\nu_0 < \rho_0$, nous avons, d'après (2),

$$\varphi + [\omega^{\lambda}(\rho_0 - \nu_0) + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \ldots + \rho_\lambda] = \psi;$$

donc aussi

$$\varphi < \psi.$$

Si enfin

$$\mu = \lambda \quad \nu_0 = \rho_0 \quad \nu_1 = \rho_1 \ldots \nu_{\sigma-1} = \rho_{\sigma-1} \quad \sigma \leqq \mu.$$

et, par contre, ν_σ et ρ_σ différents, et par exemple $\nu_\sigma < \rho_\sigma$, on a, d'après (2),

$$\varphi + [\omega^{\lambda-\sigma}(\rho_0 - \nu_0) + \omega^{\lambda-\sigma-1}\rho_{\sigma+1} + \ldots + \rho_\lambda] = \psi;$$

donc de nouveau

$$\varphi < \psi.$$

Nous voyons ainsi que les nombres représentés par φ et ψ ne peuvent être égaux que dans le cas de l'identité complète des expressions φ et ψ.

L'*addition* de φ et ψ conduit aux résultats suivants :

1° Si $\mu < \lambda$, on a vu plus haut que

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2° Si $\mu = \lambda$, on a :

$$\varphi + \psi = \omega^{\lambda}(\nu_0 + \rho_0) + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \ldots + \rho_\lambda.$$

3° Si $\mu > \lambda$, on a :

$$\varphi + \psi = \omega^{\mu}\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \ldots + \omega^{\lambda+1}\nu_{\mu-\lambda-1} + \omega^{\lambda}(\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0) + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \ldots + \rho_\lambda$$

Pour effectuer le produit de φ et de ψ, nous remarquons que si ρ est un nombre fini différent de 0, on a la formule :

$$\varphi . \rho = \omega^{\mu}\nu_0\rho + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \ldots + \nu_\mu, \tag{5}$$

qui s'obtient facilement en effectuant la somme des ρ termes

$$\varphi + \varphi + \ldots + \varphi.$$

Par application répétée du théorème G, § 15, on obtient de plus, en tenant compte de F, § 15 :

$$\varphi\omega = \omega^{\mu+1} \tag{6}$$

et par suite

$$(7) \qquad \varphi\omega^{\lambda} = \omega^{\mu+\lambda}.$$

La loi distributive [(8), § 14] nous donne :

$$\varphi\psi = \varphi\omega^{\lambda}\rho_0 + \varphi\omega^{\lambda-1}\rho_1 + \ldots + \varphi\omega\rho_{\lambda-1} + \varphi\rho_{\lambda}$$

et les formules (4), (5) et (7) nous conduisent aux résultats suivants :

1° Si $\rho_{\lambda} = 0$, on a :

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\rho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\rho_1 + \ldots + \omega^{\mu+1}\rho_{\lambda-1} = \omega^{\mu}\psi.$$

2° Si $\rho_{\lambda} \neq 0$, on a :

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\rho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\rho_1 + \ldots + \omega^{\mu+1}\rho_{\lambda-1} + \omega^{\mu}\nu_0\rho_{\lambda} + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \ldots + \nu_{\mu}.$$

Nous arrivons de la manière suivante à une décomposition remarquable du nombre φ; soit

$$(8) \qquad \varphi = \omega^{\mu}\varkappa_0 + \omega^{\mu_1}\varkappa_1 + \ldots + \omega^{\mu_{\tau}}\varkappa_{\tau}$$

où

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 \ldots > \mu_{\tau} \gtrless 0$$

et $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\tau}$ des nombres finis différents de 0. Nous avons alors

$$\varphi = (\omega^{\mu_1}\varkappa_1 + \omega^{\mu_2}\varkappa_2 + \ldots + \omega^{\mu_{\tau}}\varkappa_{\tau})(\omega^{\mu-\mu_1}\varkappa_0 + 1)$$

et, par application répétée de cette formule, nous obtenons

$$\varphi = \omega^{\mu_{\tau}}\varkappa_{\tau}(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_{\tau}}\varkappa_{\tau-1} + 1)(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}}\varkappa_{\tau-2} + 1)\ldots \ldots(\omega^{\mu-\mu_1}\varkappa_0 + 1).$$

Mais on a :

$$\omega^{\lambda}\varkappa + 1 = (\omega^{\lambda} + 1)\varkappa$$

dans le cas où $\varkappa$ est un nombre fini différent de 0; donc

$$(9) \quad \varphi = \omega^{\mu_{\tau}}\varkappa_{\tau}(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_{\tau}} + 1)\varkappa_{\tau-1}(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}} + 1)\varkappa_{\tau-2} \ldots(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)\varkappa_0.$$

Les facteurs $\omega^{4}+1$ intervenant ici sont tous *indécomposables* et le nombre φ ne peut être représenté que *d'une seule manière* sous cette forme de produit. Si $\mu_\tau = 0$, φ est de la première espèce, sinon il est de la deuxième espèce.

La différence apparente qu'il y a entre les formules de ce paragraphe et celles déjà données au volume XXI des *Mathem. Annalen* (*Grundlagen,* p. 41) tient à la manière différente d'écrire le produit de deux nombres ; nous plaçons maintenant le multiplicande à gauche et le multiplicateur à droite ; nous faisions autrefois le contraire.

§ 18. — *L'exponentielle γ^α dans le domaine de la deuxième classe numérique.*

Soit ξ une variable dont le domaine de variation comprend tous les nombres de la première et de la deuxième classe, y compris 0 ; soient γ et δ deux constantes appartenant au même domaine

$$\delta > 0 \qquad \gamma > 1.$$

Nous pouvons alors établir le théorème suivant :

A. *Il existe une seule fonction bien déterminée uniforme $f(\xi)$ de la variable ξ, qui remplisse les conditions suivantes :*

1°
$$f(0) = \delta.$$

2° *ξ' et ξ'' étant deux valeurs quelconques de ξ telles que $\xi' < \xi''$, on a :*

$$f(\xi') < f(\xi'').$$

3° *Pour toute valeur de ξ, on a :*

$$f(\xi + 1) = f(\xi)\gamma.$$

4° *Si $\{\xi_\nu\}$ est une série fondamentale quelconque, $\{f(\xi_\nu)\}$ en est une autre, et la condition*

$$\xi = \lim \{\xi_\nu\}$$

entraîne

$$f(\xi) = \lim. f(\xi_\nu).$$

Démonstration. — D'après 1° et 2°, nous avons

$$f(1) = \delta\gamma, \quad f(2) = \delta\gamma\gamma, \quad f(3) = \delta\gamma\gamma\gamma, \ldots$$

et par suite, puisque $\delta > 0$, $\gamma > 1$

$$f(1) < f(2) < f(3) < \ldots < f(\nu) < f_{(\nu+1)} \ldots$$

Supposons le théorème établi pour toutes les valeurs de ξ qui sont $< \alpha$, α étant un nombre quelconque de la deuxième classe. Je dis qu'il est encore vrai pour $\xi \leq \alpha$. Car si α est de la première espèce, il résulte de 3°

$$f(\alpha) = f(\underline{\alpha_1})\gamma > f(\underline{\alpha_1})$$

et les conditions 2°, 3° et 4° sont vérifiées par $\xi \leq \alpha$.

Mais si α est de la deuxième espèce et défini par la série fondamentale $\{\alpha_\nu\}$

$$\alpha = \lim. \alpha_\nu,$$

il résulte de 2° que $\{f(\alpha_\nu)\}$ est une série fondamentale, et de 4° que $f(\alpha) = \lim. f(\alpha_\nu)$. Si l'on considère une autre série fondamentale $\{\alpha'_\nu\}$, telle que $\alpha = \lim. \alpha'_\nu$, les deux séries fondamentales $\{f(\alpha_\nu)\}$ et $\{f(\alpha'_\nu)\}$ sont liées, en vertu de 2°, et par suite

$$f(\alpha) = \lim. f(\alpha'_\nu).$$

La valeur $f(\alpha)$ est donc unique.

Si α' est un nombre quelconque $< \alpha$, on voit facilement que $f(\alpha') < f(\alpha)$. Les conditions 2°, 3° et 4° sont donc aussi remplies pour $\xi \leq \alpha$. Le théorème est donc établi *pour toutes les valeurs de* ξ.

Car s'il y avait des valeurs exceptionnelles de ξ pour lesquelles il n'aurait pas lieu, une de ces valeurs, que nous appelons α, devrait être *la plus petite*. Le théorème serait donc

valable pour $\xi < \alpha$ et non pour $\xi \leq \alpha$, ce qui est en contradiction avec ce qui vient d'être démontré.

Il y a donc, pour tout le domaine de ξ, une et une seule fonction $f(\xi)$ qui vérifie les conditions 1°, 2°, 3° et 4°.

Si l'on donne à la constante δ la valeur 1 et si l'on désigne la fonction $f(\xi)$ par

$$\gamma^{\xi}$$

on peut énoncer le théorème suivant :

B. *Si* γ *est une constante arbitraire* > 1, *appartenant à la première ou à la deuxième classe, il y a une fonction bien déterminée* γ^{ξ} *de* ξ *telle que :*

1° $\gamma^0 = 1$.

2° *Si* $\xi' < \xi''$, *on a* $\gamma^{\xi'} < \gamma^{\xi''}$.

3° *Pour chaque valeur de* ξ, $\gamma^{\xi+1} = \gamma^{\xi}\gamma$.

4° *Si* $|\xi_\nu|$ *est une série fondamentale quelconque,* $|\gamma^{\xi_\nu}|$ *en est une autre et la condition* $\xi = \lim. \xi_\nu$ *entraîne :*

$$\gamma^{\xi} = \lim. \gamma^{\xi_\nu}.$$

Mais nous pouvons énoncer le théorème suivant :

C. $f(\xi)$ *étant la fonction caractérisée au théorème A, on a*

$$f(\xi) = \delta\gamma^{\xi}.$$

Démonstration. — La formule (24), § 14, montre que la fonction $\delta\gamma^{\xi}$ vérifie non seulement les conditions 1°, 2°, 3° du théorème A, mais aussi la condition 4°. Puisque la fonction $f(\xi)$ est unique, elle doit être identique à $\delta\gamma^{\xi}$.

D. *Si* α *et* β *sont deux nombres arbitraires de la première et de la deuxième classe, y compris* 0, *on a :*

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}.$$

Démonstration. — Considérons la fonction $\varphi(\xi) = \gamma^{\alpha+\xi}$.
La formule (23), § 14, nous montre que

$$\lim. (\alpha + \xi_\nu) = \alpha + \lim. \xi_\nu$$

et nous reconnaissons que $\varphi(\xi)$ vérifie les quatre conditions suivantes :

1° $\varphi(0) = \gamma^\alpha$;

2° Si $\xi' < \xi''$, on a $\varphi(\xi') < \varphi(\xi'')$;

3° Pour chaque valeur de ξ, $\varphi(\xi + 1) = \varphi(\xi)\gamma$;

4° Si $|\xi_\nu|$ est une série fondamentale telle que lim. $\xi_\nu = \xi$, on a :

$$\varphi(\xi) = \lim. \varphi(\xi_\nu).$$

Le théorème C, où l'on fait $\delta = \gamma^\alpha$, nous donne alors :

$$\varphi(\xi) = \gamma^\alpha \gamma^\xi$$

et en posant $\xi = \beta$

$$\gamma^{\alpha + \beta} = \gamma^\alpha \gamma^\beta.$$

E. *Si α et β sont deux nombres arbitraires de la première et de la deuxième classe, y compris* 0, *on a :*

$$\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^\alpha)^\beta$$

Démonstration. — Considérons la fonction $\psi(\xi) = \gamma^{\alpha\xi}$ et remarquons que, d'après (24), § 14, on a toujours lim. $\alpha\xi_\nu = \alpha$lim. ξ_ν; nous pouvons alors, en vertu du théorème D, affirmer ce qui suit :

1° $\psi(0) = 1$;

2° Si $\xi' < \xi''$, on a $\psi(\xi') < \psi(\xi'')$;

3° Pour chaque valeur de ξ, on a $\psi(\xi + 1) = \psi(\xi)\gamma^\alpha$;

4° Si $|\xi_\nu|$ est une série fondamentale définissant $\xi = \lim. \xi_\nu$, $|\psi(\xi_\nu)|$ en est une aussi et

$$\psi(\xi) = \lim \psi(\xi_\nu).$$

On a donc, d'après le théorème C, où l'on remplace δ par 1 et γ par γ^α :

$$\psi(\xi) = (\gamma^\alpha)^\xi. \text{ —}$$

La comparaison de γ^ξ et de ξ nous donne le théorème suivant :

F. *Si γ est* > 1, *on a, pour toutes les valeurs de* ξ,

$$\gamma^\xi \geq \xi.$$

Démonstration. — Dans les cas $\xi = 0$, $\xi = 1$, le théorème est évident. Nous allons montrer que s'il est vrai pour toutes les valeurs de ξ plus petites que $\alpha > 1$, il est aussi vrai pour α.

Si α est de la première espèce, on a par hypothèse :

$$\underline{\alpha_1} \leqq \gamma^{\underline{\alpha_1}}$$

et par suite :

$$\underline{\alpha_1}\gamma \leqq \gamma^{\underline{\alpha_1}}\gamma = \gamma^{\alpha}$$

ou

$$\gamma^{\alpha} \geqq \underline{\alpha_1} + \underline{\alpha_1}(\gamma - 1).$$

Puisque $\underline{\alpha_1}$ et $\gamma - 1$ sont au moins égaux à 1 et que $\underline{\alpha_1} + 1 = \alpha$, on a :

$$\gamma^{\alpha} \geqq \alpha.$$

Si, au contraire, α est de la deuxième espèce, et si

$$\alpha = \lim. \alpha_\nu$$

α_ν est plus petit que α et l'on a, en vertu de l'hypothèse faite,

$$\alpha_\nu \leqq \gamma^{\alpha_\nu}$$

et par suite

$$\lim. \alpha_\nu \leqq \lim. \gamma^{\alpha_\nu},$$

c'est-à-dire :

$$\alpha \leqq \gamma^{\alpha}.$$

S'il y avait des valeurs de ξ pour lesquelles $\xi > \gamma^{\xi}$, l'une d'elles devrait être la plus petite; désignons-la par α. Pour toutes les valeurs de $\xi < \alpha$, on aurait

$$\xi \leqq \gamma^{\xi}$$

et au contraire

$$\alpha > \gamma^{\alpha},$$

ce qui est en contradiction avec ce qui vient d'être démontré. Nous avons ainsi pour toutes les valeurs de ξ

$$\gamma^{\xi} \geqq \xi.$$

§ 19. — *La forme normale des nombres de la deuxième classe.*

Soit α un nombre quelconque de la deuxième classe. L'exponentielle ω^ξ deviendra, pour une valeur suffisamment grande de ξ, plus grande que α. D'après le théorème F, § 18, cela sera toujours pour $\xi > \alpha$; mais, en général, cela arrivera aussi pour des valeurs plus petites.

Le théorème B, § 16, nous apprend que parmi toutes les valeurs de ξ pour lesquelles

$$\omega^\xi > \alpha$$

l'une est la plus petite, nous la nommons β et nous voyons facilement que ce n'est pas un nombre de la deuxième espèce. Car si

$$\beta = \lim . \beta_\nu,$$

on aurait, puisque $\beta_\nu < \beta$,

$$\omega^{\beta_\nu} \leqq \alpha$$

et par suite

$$\lim \omega^{\beta_\nu} \leqq \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\omega^\beta \leqq \alpha,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi β est de la première espèce. Nous désignerons β_1 par α_0, de sorte que $\beta = \alpha_0 + 1$; nous pouvons ainsi affirmer *qu'il y a un nombre bien déterminé α_0 de la première ou de la deuxième classe de nombres qui vérifie les deux conditions*

$$(1) \qquad \omega^{\alpha_0} \leqq \alpha, \qquad \omega^{\alpha_0}\omega > \alpha.$$

De la deuxième condition, nous concluons que la relation

$$\omega^{\alpha_0}\nu \leqq \alpha$$

n'est pas vérifiée pour toutes les valeurs finies de ν; car, sans cela, l'on aurait : $\lim.\ \omega^{\alpha_0}\nu = \omega^{\alpha_0}\omega \leqq \alpha$.

Nous désignons par $\varkappa_0 + 1$ le *plus petit nombre fini* ν pour lequel

$$\omega^{\alpha_0}\nu > \alpha.$$

(1) montre que $\varkappa_0$ est plus grand que 0.

Il y a donc aussi un nombre bien déterminé $\varkappa_0$ *de la première classe des nombres,* tel que

$$(2) \qquad \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 \leqq \alpha, \qquad \omega^{\alpha_0}(\varkappa_0 + 1 > \alpha.$$

Si nous posons $\alpha - \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \alpha'$, nous avons

$$(3) \qquad \alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha'$$

et

$$(4) \qquad 0 < \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \qquad 0 < \varkappa_0 < \omega.$$

Le nombre α ne peut être représenté que *d'une seule façon* sous la forme (3), si l'on suppose vérifier les conditions (4). Car de (3) et (4) résultent les relations (2) et enfin les relations (1).

Mais le seul nombre vérifiant les relations (1) est $\alpha_0 = \beta - 1$, et le nombre $\varkappa_0$ est défini d'une façon unique par les relations (2). De (1) et (4) résultent encore, eu égard au théorème F, § 18,

$$\alpha' < \alpha \qquad \alpha_0 \leqq \alpha.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

A. *Tout nombre* α *de la deuxième classe peut être mis d'une seule manière sous la forme*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha'$$

où

$$0 \leqq \alpha' < \omega^{\alpha_0} \qquad 0 < \varkappa_0 < \omega.$$

α' *est toujours plus petit que* α, *et* α_0 *est inférieur ou égal à* α.

Si α' est un nombre de la *deuxième* classe, on peut lui appliquer le théorème A, et nous avons

(5) $$\alpha' = \omega^{\alpha_1} x_1 + \alpha'',$$
$$0 \leqq \alpha'' < \omega^{\alpha_1}, \qquad 0 < x_1 < \omega,$$

et l'on a

$$\alpha_1 < \alpha_0, \qquad \alpha'' < \alpha'.$$

En poursuivant, nous obtenons une suite de relations

(6) $$\alpha'' = \omega^{\alpha_2} x_2 + \alpha''';$$
(7) $$\alpha''' = \omega^{\alpha_3} x_3 + \alpha^{IV}.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Mais cette suite ne peut être infinie et doit nécessairement s'arrêter.

Car les nombres α, α', α'', ... vont en décroissant.

$$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \dots$$

Si une telle série de nombres transfinis était illimitée, aucun terme ne serait le plus petit, ce qui est impossible (théorème B, § 16). Il existe donc un certain nombre fini τ, tel que

$$\alpha^{(\tau+1)} = 0.$$

Si nous réunissons les équations (3), (5), (6), (7), ..., nous obtenons :

B. *Tout nombre α de la deuxième classe peut être mis d'une seule façon sous la forme*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} x_0 + \omega^{\alpha_1} x_1 + \omega^{\alpha_2} x_2 + \dots + \omega^{\alpha_\tau} x_\tau$$

où α_0, α_1, ..., α_τ sont des nombres de la première ou de la deuxième classe, qui vérifient les conditions

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_\tau \geqq 0,$$

tandis que x_0, x_1, ..., x_τ, sont des nombres différents de 0 de la première classe.

La forme donnée ici aux nombres de la deuxième classe est

dite leur *forme normale :* α_0 s'appelle *le degré,* α_τ *l'exposant* de α; pour $\tau = 0$, le degré et l'exposant sont égaux.

Un nombre α *est de la première ou de la deuxième espèce suivant que l'exposant* α_τ *est égal ou supérieur à* 0.

Considérons un autre nombre β écrit sous la forme normale

$$(8) \qquad \beta = \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \ldots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

Pour comparer α et β, et calculer leur somme et leur différence, nous emploierons les formules

$$(9) \qquad \omega^{\alpha'}x' + \omega^{\alpha'}x = \omega^{\alpha'}(x' + x)$$

$$(10) \qquad \omega^{\alpha'}x' + \omega^{\alpha''}x'' = \omega^{\alpha''}x'' \quad \alpha' < \alpha''$$

où x, x', x'' sont des nombres finis.

Ce sont des généralisations des formules (2) et (3), § 17.

Pour le calcul du produit $\alpha\beta$ interviennent les formules

$$(11) \qquad \alpha\lambda = \omega^{\alpha_0}x_0\lambda + \omega^{\alpha_1}x_1 + \ldots + \omega^{\alpha_\tau}x_\tau \qquad 0 < \lambda < \omega;$$

$$(12) \qquad \alpha\omega = \omega^{\alpha_0 + 1};$$

$$(13) \qquad \alpha\omega^{\beta'} = \omega^{\alpha_0 + \beta'}, \ \beta' > 0.$$

L'exponentiation est facile à effectuer grâce à la formule suivante :

$$(14) \qquad \alpha^\lambda = \omega^{\alpha_0\lambda}x_0 + \ldots, \qquad 0 < \lambda < \omega.$$

Les termes venant à la droite ont un degré moindre que celui du premier. Il en résulte que les séries fondamentales $\{\alpha^\lambda\}$ et $\{\omega^{\alpha_0\lambda}\}$ sont équivalentes, de sorte que

$$(15) \qquad \alpha^\omega = \omega^{\alpha_0\omega}, \qquad \alpha_0 > 0,$$

et par suite, en vertu du théorème E, § 18,

$$\alpha^{\omega\beta'} = \omega^{\alpha_0\omega\beta'}, \quad \alpha_0 > 0, \quad \beta' > 0.$$

A l'aide de ces formules, on démontre facilement les théorèmes suivants :

C. *Si les premiers termes $\omega^{\alpha_0}x_0$ et $\omega^{\beta_0}\lambda_0$ des formes normales de deux nombres α et β ne sont pas égaux, α est plus petit ou plus grand que β, suivant que $\omega^{\alpha_0}x_0$ est plus petit ou plus grand que $\omega^{\beta_0}\lambda_0$.*

Si on a

$$\omega^{\alpha_0}x_0 = \omega^{\beta_0}\lambda_0,\ \omega^{\alpha_1}x_1 = \omega^{\beta_1}\lambda_1,\ \ldots,\ \omega^{\alpha_\rho}x_\rho = \omega^{\beta_\rho}\lambda_\rho$$

α est plus petit ou plus grand que β, suivant que $\omega^{\alpha_{\rho+1}}x_{\rho+1}$ est plus petit ou plus grand que $\omega^{\beta_{\rho+1}}\lambda_{\rho+1}$.

D. *Si le degré α_0 de α est plus petit que le degré β_0 de β, on a*

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Si $\alpha_0 = \beta_0$, on a

$$\alpha + \beta = \omega^{\beta_0}(x_0 + \lambda_0) + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \ldots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

Mais si

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots, > \alpha_\rho \geqq \beta_0 \qquad \alpha_{\rho+1} < \beta_0,$$

on a

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}x_0 + \ldots + \omega^{\alpha_\rho}x_\rho + \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \ldots\ \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

E. *Si β est de la deuxième espèce ($\beta_\sigma > 0$), on a*

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \ldots + \omega^{\alpha_0+\beta_\sigma}\lambda_\sigma = \omega^{\alpha_0}\beta;$$

mais si β est de la première espèce ($\beta_\sigma = 0$), on a

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \ldots + \omega^{\alpha_0+\beta_{\sigma-1}}\lambda_{\sigma-1}$$
$$+ \omega^{\alpha_0}x_0\lambda_\sigma + \omega^{\alpha_1}x_1 + \ldots + \omega^{\alpha_\tau}x_\tau.$$

F. *Si β est de la deuxième espèce ($\beta_\sigma > 0$), on a*

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta};$$

mais si β est de la première espèce ($\beta_\sigma = 0$), et de la forme $\beta = \beta' + \lambda_\sigma$ où β' est de la deuxième espèce, on a

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta'}\alpha^{\lambda_\sigma}.$$

G. *Tout nombre α de la deuxième classe peut être mis d'une seule manière, sous la forme du produit.*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0} \varkappa_\tau (\omega^{\gamma_1} + 1) \varkappa_{\tau-1} (\omega^{\gamma_2} + 1) \varkappa_{\tau-2} \ldots (\omega^{\gamma_\tau} + 1) \varkappa_0$$

et l'on a

$$\gamma_0 = \alpha_\tau, \gamma_1 = \alpha_{\tau-1} - \alpha_\tau, \gamma_2 = \alpha_{\tau-2} - \alpha_{\tau-1}, \ldots \gamma_\tau = \alpha_0 - \alpha_1,$$

tandis que $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, ..., $\varkappa_\tau$ ont la même signification que dans la forme normale. Les facteurs $\omega^\gamma + 1$ sont tous indécomposables.

H. *Tout nombre α de la deuxième classe et de deuxième espèce, peut être mis, d'une seule manière, sous la forme*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0} \alpha',$$

où γ_0 est > 0 et α' est un nombre de première espèce, appartenant à la première ou à la deuxième classe.

I. *Pour que deux nombres α et β de la deuxième classe vérifient la relation*

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

il est nécessaire et suffisant qu'ils aient la forme

$$\alpha = \gamma \mu, \qquad \beta = \gamma \nu,$$

où μ et ν sont deux nombres de la première classe.

K. *Pour que deux nombres α et β de la deuxième classe vérifient la relation*

$$\alpha \beta = \beta \alpha,$$

il est nécessaire et suffisant qu'ils aient la forme

$$\alpha = \gamma^\mu, \qquad \beta = \gamma^\nu,$$

où μ et ν sont deux nombres de la première classe.

Pour montrer la portée de la *forme normale* des nombres de la dernière classe, et du *développement en produit* qui lui est intimement lié, nous donnerons ici les démonstrations des théorèmes I et K qui s'en déduisent.

De l'hypothèse

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

nous concluons tout d'abord que les degrés α_0 et β_0 de α et β sont égaux. Car, si par exemple α_0 était $< \beta_0$, on aurait, d'après le thèorème D,

$$\alpha + \beta = \beta;$$

donc aussi

$$\beta + \alpha = \beta,$$

ce qui est impossible, puisque [(2), § 14]

$$\beta + \alpha > \beta.$$

Nous pouvons donc poser

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \qquad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \beta',$$

où les membres α' et β' sont de degré plus petit que α_0, et μ et ν des nombres finis différents de 0.

D'après le théorème D, on a

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta', \qquad \beta + \alpha = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha';$$

donc

$$\omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta' = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha'$$

et par suite (théorème D, § 14)

$$\beta' = \alpha'.$$

Nous avons ainsi

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \qquad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \alpha',$$

et si l'on pose

$$\omega^{\alpha_0} + \alpha' = \gamma,$$

on a, d'après (11),

$$\alpha = \gamma\mu, \qquad \beta = \gamma\nu.$$

Supposons maintenant que les nombres α et β de la deuxième classe et de *première espèce* vérifient la relation

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

et supposons que

$$\alpha > \beta.$$

Mettons les nombres α et β sous forme de produit (théorème G) et soit

$$\alpha = \delta\alpha', \qquad \beta = \delta\beta',$$

où les premiers facteurs de gauche de α' et β' (sauf 1) sont différents. On a alors

$$\alpha' > \beta'$$

et

$$\alpha'\delta\beta' = \beta'\delta\alpha'.$$

Tous les nombres intervenant ici et dans la suite sont de *première espèce,* d'après la supposition faite sur α et β.

La dernière équation fait immédiatement reconnaître (eu égard au théorème G) que les nombres α' et β' ne peuvent, tous les deux, être transfinis, car, dans ce cas, leurs premiers facteurs communs de gauche seraient égaux. Ils ne peuvent non plus être finis tous deux; car δ serait alors transfini et, en désignant par $\varkappa$ son premier facteur fini de gauche, on aurait

$$\alpha'\varkappa = \beta'\varkappa$$

et par suite

$$\alpha' = \beta'.$$

On a donc nécessairement

$$\alpha' > \omega, \qquad \beta' < \omega.$$

Mais le nombre fini β' doit être égal à 1,

$$\beta' = 1$$

car autrement ce serait un diviseur du facteur de gauche de α'.

Nous arrivons à ce résultat que $\beta = \delta$, et par suite

$$\alpha = \beta\alpha'$$

où α' est un nombre de première espèce appartenant à la deuxième classe et qui doit être plus petit que α.

$$\alpha' < \alpha.$$

Entre α' et β existe la relation

$$\alpha'\beta = \beta\alpha'.$$

Si α' est aussi plus grand que β, on démontre de la même manière l'existence d'un nombre transfini de première espèce $\alpha'' < \alpha'$, tel que

$$\alpha' = \beta\alpha'', \qquad \alpha''\beta = \beta\alpha''.$$

Dans le cas où α'' est encore plus grand que β, il existe un nombre $\alpha''' < \alpha''$, tel que

$$\alpha'' = \beta\alpha''', \qquad \alpha'''\beta = \beta\alpha''',$$

et ainsi de suite.

La série des nombres décroissants α', α'', α''', ..., doit être finie (th. B, § 16).

Donc, pour un indice fini déterminé ρ_0, on a

$$\alpha^{(\rho_0)} \leq \beta.$$

Si

$$\alpha^{(\rho_0)} = \beta,$$

il vient

$$\alpha = \beta^{\rho_0+1}, \qquad \beta = \beta;$$

le théorème K est démontré, et l'on a

$$\gamma = \beta, \qquad \mu = \rho_0 + 1, \qquad \nu = 1.$$

Mais si

$$\alpha^{(\rho_0)} < \beta,$$

nous posons

$$\alpha^{(\rho_0)} = \beta_1$$

et nous obtenons

$$\alpha = \beta^{\rho_0}\beta_1, \qquad \beta\beta_1 = \beta_1\beta, \qquad \beta_1 < \beta.$$

Par conséquent, il y a aussi un nombre fini ρ_1, tel que

$$\beta = \beta_1^{\rho_1}\beta_2, \qquad \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1, \qquad \beta_2 < \beta_1.$$

On a d'une façon analogue

$$\beta_1 = \beta_2^{\rho_2}\beta_3, \qquad \beta_2\beta_3 = \beta_3\beta_2, \qquad \beta_3 < \beta_2,$$

et ainsi de suite

La série des nombres décroissants β_1, β_2, β_3, ... doit être limitée d'après le théorème B, § 16.

Il existe donc un nombre fini x, tel que

$$\beta_{x-1} = \beta_x^{\rho_x}.$$

Si nous posons maintenant

$$\beta_x = \gamma,$$

nous aurons

$$\alpha = \gamma^{\mu}, \qquad \beta = \gamma,$$

où μ et ν sont le numérateur et le dénominateur de la fraction continue

$$\frac{\mu}{\nu} = \rho_0 + \cfrac{1}{\rho_1 + \cdots \cfrac{1}{\rho_x}}.$$

§ 20. — *Les nombres* ε *de la deuxième classe numérique.*

La forme normale du nombre α,

(1) $\qquad \alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \ldots, \; \alpha_0 > \alpha_1 > \ldots, \; 0 < \varkappa < \omega,$

nous montre immédiatement, eu égard au théorème F, § 18, que le degré α_0 de α n'est jamais supérieur à α. On peut se demander s'il n'y a pas des nombres α, pour lesquels $\alpha_0 = \alpha$.

Dans ce cas, la forme normale devrait évidemment se réduire au premier terme et même à ω^{α}; α devrait donc être racine de l'équation

(2) $\qquad \omega^{\varepsilon} = \varepsilon.$

D'ailleurs toute racine de cette équation aurait la forme normale ω^{α} et par suite serait égale à son degré.

Les nombres de la deuxième classe, qui sont égaux à leur

degré, coïncident donc avec les racines de l'équation (2). Nous nous proposons de déterminer l'ensemble de ces racines; pour les séparer de tous les autres nombres, nous les nommerons les *nombres* ε *de la deuxième classe.*

L'existence de tels nombres ε résulte du théorème suivant :

A. *Si* γ *est un nombre quelconque de la première ou de la deuxième classe, ne vérifiant pas l'équation* (2), *les équations*

$$\gamma_1 = \omega^{\gamma}, \qquad \gamma_2 = \omega^{\gamma_1}, \ldots, \gamma_\nu = \omega^{\gamma_{\nu-1}}, \ldots$$

déterminent une série fondamentale $\{\gamma_\nu\}$. *La limite* E (γ) *de cette série fondamentale est toujours un nombre* ε.

Démonstration. — Puisque γ n'est pas un nombre ε, on a $\omega^{\gamma} > \gamma$, c'est-à-dire $\gamma_1 > \gamma$. D'après le théorème B, § 18, on a aussi $\omega^{\gamma_1} > \omega^{\gamma}$, c'est-à-dire $\gamma_2 > \gamma_1$, et de la même manière $\gamma_3 > \gamma_2$, et ainsi de suite. La suite $\{\gamma_\nu\}$ est donc une série fondamentale. Désignons par E (γ) sa limite, on a

$$\omega^{E(\gamma)} = \lim. \omega^{\gamma_\nu} = \lim. \gamma_{\nu+1} = E(\gamma).$$

E(γ) est donc un nombre ε. —

B. *Le nombre* $\varepsilon_0 =$ E $(1) =$ *lim.* ω_ν, *où*

$$\omega_1 = \omega, \ \omega_2 = \omega^{\omega_1}, \ldots, \omega_\nu = \omega^{\omega_{\nu-1}}, \ldots$$

est le plus petit de tous les nombres ε.

Soit ε' un nombre α tel que

$$\omega^{\varepsilon'} = \varepsilon'.$$

Comme ε' est plus grand que ω, $\omega^{\varepsilon'}$ est plus grand que ω^{ω}, c'est-à-dire $\varepsilon' > \omega_1$. Il en résulte de même $\omega^{\varepsilon'} > \omega^{\omega_1}$ ou $\varepsilon' > \omega_2$, et ainsi de suite.

D'une façon générale on a

$$\varepsilon' > \omega$$

et il en résulte

$$\varepsilon' \geqq \lim. \omega_\nu,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon' \geqq \varepsilon_0.$$

$\varepsilon_0 = E(1)$ est donc le plus petit de tous les nombres ε.

C. *Si* ε' *est un nombre* ε *quelconque,* ε'' *le nombre* ε *immédiatement supérieur et* γ *un nombre quelconque intermédiaire,*

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''.$$

$E(\gamma)$ *est égal à* ε''.

Démonstration. — De

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''$$

il résulte

$$\omega^{\varepsilon'} < \omega^{\gamma} < \omega^{\varepsilon''},$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon' < \gamma_1 < \varepsilon''.$$

Nous en déduisons par la même procédé

$$\varepsilon' < \gamma_2 < \varepsilon'',$$

et ainsi de suite. Nous avons en général

$$\varepsilon' < \gamma_\nu < \varepsilon'',$$

d'où il résulte

$$\varepsilon' < E(\gamma) \leqq \varepsilon''.$$

Mais $E(\gamma)$ est un nombre ε (th. A) et ne peut être inférieur au nombre ε'' qui est le nombre ε venant immédiatement après ε'. Donc

$$E(\gamma) = \varepsilon''.$$

$\varepsilon' + 1$ n'est pas un nombre ε, car il résulte de l'équation de définition $\varepsilon = \omega^{\varepsilon}$, que tous les nombres ε sont de deuxième espèce; donc $\varepsilon' + 1$ est sûrement plus petit que ε'' et par suite :

D. *Si* ε' *est un nombre* ε *quelconque,* E $(\varepsilon' + 1)$ *est le nombre* ε *immédiatement supérieur.*

Après le nombre ε initial ε_0, vient le nombre ε immédiatement supérieur que nous nommerons ε_1

$$\varepsilon_1 = E(\varepsilon_0 + 1);$$

puis le nombre ε immédiatement supérieur ε_2

$$\varepsilon_2 = E(\varepsilon_1 + 1),$$

et ainsi de suite

En général, le $(\nu + 1)^{\text{ème}}$ nombre ε est donné par la formule de récurrence

$$(3) \qquad \varepsilon_\nu = E(\varepsilon_{\nu-1} + 1).$$

Mais la série infinie

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$$

ne contient pas tous les nombres ε, comme il résulte du théorème suivant :

E. *Si* $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ *est une série infinie de nombres* ε *tels que*

$$\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' \ldots \varepsilon^{(\nu)} < \varepsilon^{(\nu+1)} \ldots,$$

le nombre lim. $\varepsilon^{(\nu)}$ *est un nombre* ε *et c'est précisément le nombre immédiatement supérieur à tous les* $\varepsilon^{(\nu)}$.

Démonstration. — Elle résulte de la formule

$$\omega^{\lim_\nu . \varepsilon^{(\nu)}} = \lim . \omega^{\varepsilon^{(\nu)}} = \lim . \varepsilon^{(\nu)}$$

et de ce fait que le nombre lim. $\varepsilon^{(\nu)}$ est le nombre de la deuxième classe immédiatement supérieur à tous les $\varepsilon^{(\nu)}$.

F. *La réunion de tous les nombres* ε *de la deuxième classe, rangés par ordre de grandeur croissante, forme un ensemble bien ordonné, qui a le type* Ω *de la deuxième classe numérique, où les éléments sont rangés par ordre de grandeur croissante; cet ensemble a donc la puissance alef-un.*

Démonstration. — La réunion de tous les nombres ε de la deuxième classe, rangés par ordre de grandeur, forme un ensemble bien ordonné (th. C, § 16):

$$(4) \qquad \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots, \varepsilon_\omega, \varepsilon_{\omega+1}, \ldots, \varepsilon_{\alpha'}, \ldots$$

dont la loi de formation est exprimée par les théorèmes D et E.

Si l'indice α' ne parcourait pas tous les nombres de la deuxième classe, il y aurait un nombre α qui serait le plus petit de tous les nombres qu'il n'attend pas. Mais ceci contredit le théorème D, si α est de la première espèce et le théorème E, si α est de la deuxième espèce; α' prend donc toutes les valeurs du nombre de la deuxième classe.

Si nous désignons par Ω le type de la deuxième classe, le type de (4) est

$$\omega + \Omega = \omega + \omega^2 + (\Omega - \omega^2);$$

puis comme $\omega + \omega^2 = \omega^2$

$$\omega + \Omega = \Omega.$$

L'on en déduit

$$\overline{\overline{\omega + \Omega}} = \overline{\overline{\Omega}} = \aleph_1$$

G. *Si* ε *est un nombre* ε *quelconque, et* α *un nombre arbitraire de la première ou de la deuxième classe, qui est plus petit que* ε

$$\alpha < \varepsilon$$

ε *vérifie les trois équations*

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon, \qquad \alpha\varepsilon = \varepsilon, \qquad \alpha^\varepsilon = \varepsilon.$$

Démonstration. — Si α_0 est le degré de α, on a $\alpha_0 \leqq \alpha < \varepsilon$. Mais le degré de $\varepsilon = \omega^\varepsilon$ est ε; le degré de α est donc plus petit que le degré de ε. Il en résulte donc, d'après le théorème D, § 19,

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon.$$

et par suite aussi

$$\alpha_0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Nous avons d'ailleurs, d'après la formule (13), § 19,

$$\alpha\varepsilon = \alpha\omega^{\varepsilon} = \omega^{\alpha_0 + \varepsilon} = \omega^{\varepsilon} = \varepsilon,$$

et par suite aussi

$$\alpha_0 \varepsilon = \varepsilon.$$

Enfin nous avons, d'après la formule (16), § 19,

$$\alpha^{\varepsilon} = \alpha^{\omega^{\varepsilon}} = \omega^{\alpha_0 \omega^{\varepsilon}} = \omega^{\alpha_0 \varepsilon} = \omega^{\varepsilon} = \varepsilon.$$

H. *Si* α *est un nombre quelconque de la deuxième classe, l'équation*

$$\alpha^{\xi} = \xi$$

n'a pas d'autres racines que les nombres ε *plus grands que* α.

Démonstration. — Soit β une racine de l'équation

$$\alpha^{\xi} = \xi,$$

on a

$$\alpha^{\beta} = \beta,$$

et il en résulte immédiatement

$$\beta > \alpha.$$

D'ailleurs β doit être de deuxième espèce, sinon

$$\alpha^{\beta} > \beta.$$

Nous avons donc, d'après le théorème F, § 19,

$$\alpha^{\beta} = \omega^{\alpha_0 \beta},$$

et par suite

$$\omega^{\alpha_0 \beta} = \beta.$$

D'après le théorème F, § 19,

$$\omega^{\alpha_0 \beta} \geqq \alpha_0 \beta;$$

donc

$$\beta \geqq \alpha_0 \beta,$$

et comme β ne peut être plus grand que $\alpha_0\, \beta$, on a

$$\beta = \alpha_0 \beta.$$

Donc

$$\omega^\beta = \beta$$

et β est un nombre ε, qui est plus grand que α.

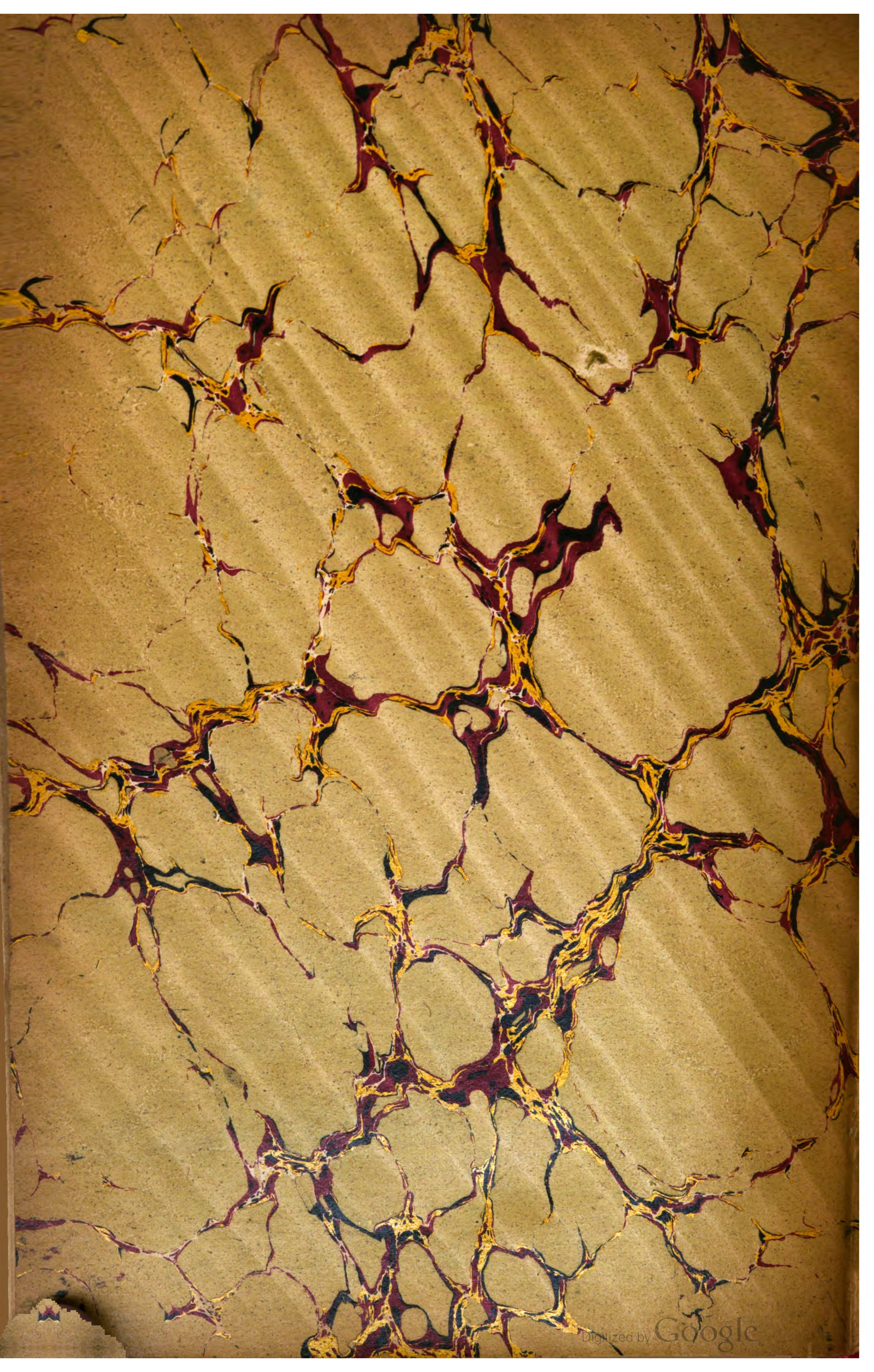
Halle, mars 1897.

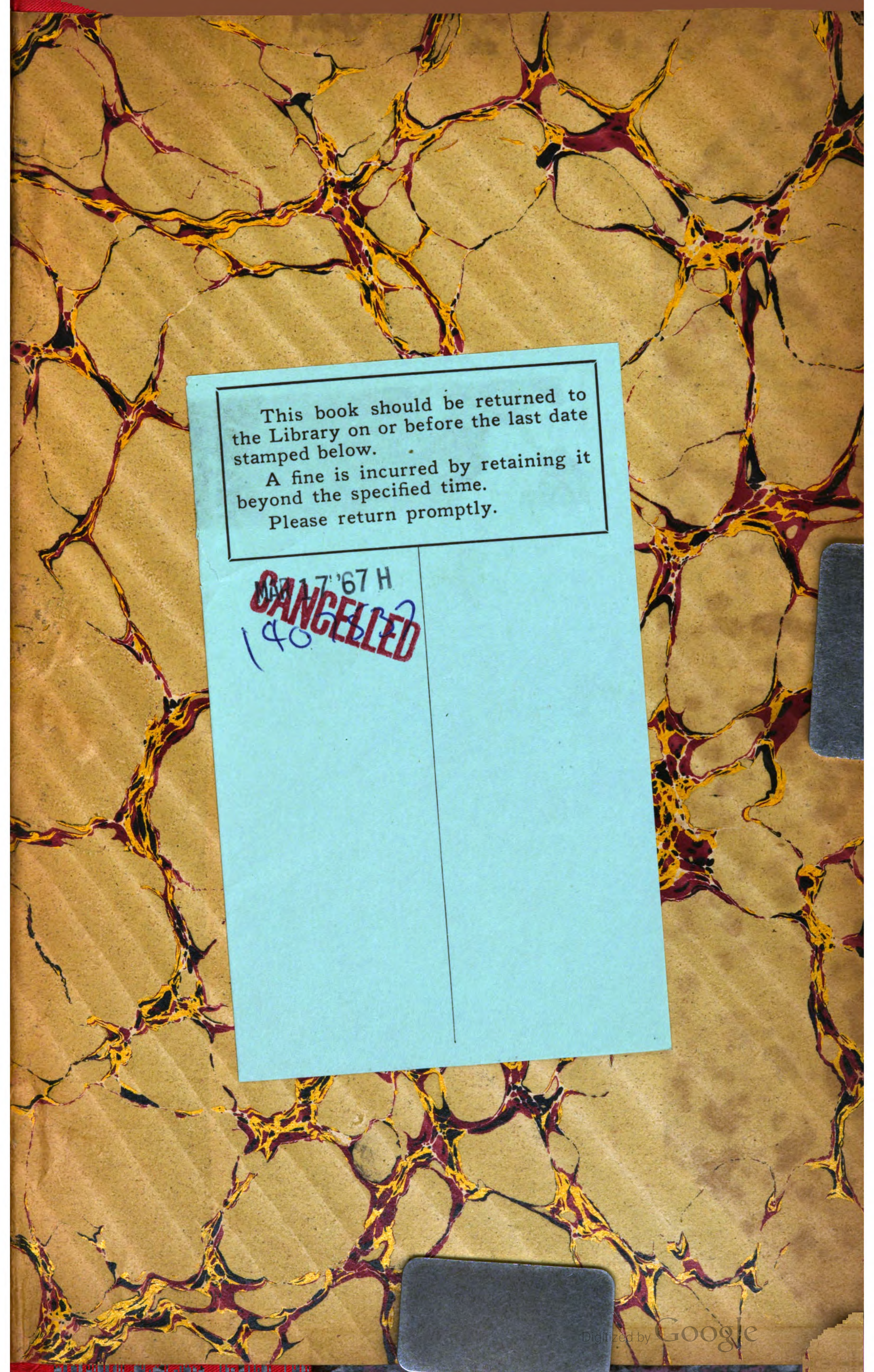
TABLE DES MATIÈRES

PREMIER ARTICLE

DEUXIÈME ARTICLE

Bordeaux. — Impr. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.




This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.
A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.
Please return promptly.
MAR 17 '67 H
CANCELLED
Digitized by Google

